Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
maart

Euclides 6

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof. dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030-78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52[c], 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 RR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 63 08. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

A BAS EUCLIDE! Weg met de verzamelingen...

Anne van Streun

Hoe de ellende begon

Eigenlijk was het de schuld van de Russen, die de Spoetnik en Gagarin de ruimte inschoten. Hoe kon dat? Waarom waren de United States niet eerst? Het lag aan het verouderde onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen! Politici en vakwetenschappers stortten zich met veel geld op het onderwijs. De eenvoudige basisstructuren van de wiskunde moesten op de scholen worden onderwezen. De verzamelingenleer, de taal van de logica, de algebraïsche en topologische structuren. In West-Europa kreeg Jean Dieudonné gehoor: A bas Euclide! En: Mort au Triangle! In 'Moderne Wiskunde' van Papy wordt de hoofdstelling van Pythagoras:

HOOFDSTELLING $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_0$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

Als

$$\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$$

dan

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \cos(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

PYTHAGORAS

Het taaltje van 1968

Het Nederlandse wiskunde-onderwijs volgt de internationale trend schoorvoetend, opgedreven door de Mammoet van Cals. Ambitieuze leerplannen, onder andere gebaseerd op de 'Transformatiemeetkunde' van Troelstra cs., worden niet haalbaar geacht. Het leerplan van 1968 is nauwelijks opzienbarend, vergeleken met vergaande leerplanwijzigingen elders. De toelichting en later het nomenclatuurrapport legt veel nadruk op het gebruik van de taal van de verzamelingen en op de opbouw uitgaande van relaties en produktverzamelingen. Enkele dwarsliggers sputteren tegen. Van Hiele vindt dat het didactisch niet deugt, De Bruyn verbaast zich over het totaal ontbreken van aandacht voor de toepassingen, Freudenthal vraagt om goede wiskunde. Maar de CEVO neemt het uittreksel uit het nomenclatuurrapport (zie het Vademecum voor wiskundeleraren) over en de lbo-mavo-leerlingen worden op het examen duchtig aan de tand gevoeld over hun kennis van het formele taaltje.

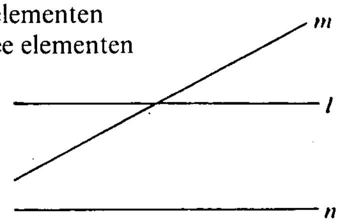
$\{(x\,y) \mid 2x + 3y = 4\} \cap \{(x, y) \mid 2x - 2y = 1\}$
$= \{(p, q)\}$
Voor p en q geldt

A	$p \geqq 0 \wedge q \geqq 0$	C	$p < 0 \wedge q \geqq 0$
B	$p \geqq 0 \wedge q < 0$	D	$p < 0 \wedge q < 0$

$\{(x, y) \mid x + y = a\} \cap \{(x, y) \mid 2x + a = b\}$
$= \{(1, -2)\}$.
Voor a en b geldt

A	$a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$	C	$a < 0 \wedge b \geqq 0$
B	$a \geqq 0 \wedge b < 0$	D	$a < 0 \wedge b < 0$

In nevenstaande figuur zijn de lijnen l, m en n getekend waarbij $l \parallel n$.
$\{P \in n \mid d(P, l) = d(P, m)\}$ bevat
A geen elementen
B precies één element
C precies twee elementen
D meer dan twee elementen



De kater

De droom duurde niet lang. Het bleek en blijkt heel goed mogelijk om eenvoudige verzamelingenleer en algebraïsche structuren te onderwijzen in het

funderend onderwijs. Maar de gebruikswaarde van deze universele wiskunde was nihil. Van een beter begrip kon niet worden gesproken. Wiskunde toegankelijk voor iedereen, één van de doelen van de 'New Math', werd niet benaderd. Even 'gründlich' als de verzamelingen in West-Duitsland werden ingevoerd, is de 'Menge' er weer uitgesmeten. 'Why Johnny can't add: the failure of the New Math' van Kline was het eerste signaal van wat later de 'Back to Basics'-beweging werd. In Engeland komt in de nieuwe SMP-serie de term verzameling of de notatie {..} niet meer voor.
In Nederland heeft bij de uitwerking van het leerplan van 1968 in de leerboeken de taal van de verzamelingen, de relaties en de logica een belangrijke plaats gekregen. Helemaal in de lijn van de toen heersende opvatting, dat die taal helpt bij het duidelijk formuleren en bijdraagt tot een beter begrip. In het lbo en het mavo is de beheersing van die taal een leerdoel geworden, dat op het examen wordt getoetst en dus voor het examen wordt getraind. In havo-vwo besteden docenten daar minder aandacht aan, mede omdat in de huidige examens havo-vwo alleen op een passieve kennis van die taal een beroep wordt gedaan.
In alle recente publikaties over het wiskunde-onderwijs (zoals het rapport 'Longitudinale planning', de artikelen van Nanda Querelle, het boek 'Ik was wiskundeleraar', enz.) wordt aangegeven dat die wiskundige taal voor de leeftijdsgroepen van 12-16 jaar het begrip niet verheldert, maar eerder verduistert.

Op korte termijn bijsturen

Op langere termijn zal het gehele wiskunde-onderwijs voor de leeftijd van 12-16 jaar (en daarvoor) onder de loep worden genomen. Over een flink aantal jaren zal dat wel tot een geheel nieuw leerplan leiden, waarin de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid en tussen wiskunde en toepassingen sterk wordt benadrukt. Die relaties krijgen ook nu steeds meer aandacht in de leerboeken voor 12-16 jaar, met name in de onderbouw havo-vwo wegens de terugkoppeling vanuit wiskunde A.
Het gevaar dreigt dat op *korte termijn* niets gedaan wordt aan de problematiek van het lbo-mavo, waar de training op de formele taal veel tijd en energie kost. Een formele taal die voor veel leerlingen een struikelblok blijkt. Een formele taal, die in toepassingen onbruikbaar is. (Zie bijvoorbeeld wiskunde A.)
Binnen het leerplan van 1968 is er alle ruimte om de afspraken, gebaseerd op het nomenclatuurrapport, op korte termijn bij te stellen. Een aantal nader te bespreken notaties en formuleringen, die niet in het leerplan voorkomen, kunnen facultatief worden gesteld. Zodat ze niet meer in examens worden gebruikt en getoetst. Het wiskunde-onderwijs in het lbo-mavo krijgt dan wat meer ruimte voor zinvollere activiteiten. Een ruimte, die in de onderbouw van havo-vwo al kan worden benut.

Wat kunnen we missen

De volgende termen en notaties kunnen – zonder in strijd te komen met het leerplan – *facultatief* worden gesteld en in woorden omschreven. De dikste rookgordijnen eerst.

$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 6\}$
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge y > 0\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 11 = 0\}$
$\{x \mid x^2 - 3x - 11 = 0\}$
f-beeld, volledig f-origineel $V \setminus W$, $V \times W$, $\vee$, $\wedge$

We geven deze verzameling aan met L, dus:
$L = \{$**Bulgarije, Nederland, Uruguay, Zweden**$\}$
In de voorlaatste kolom staan, in rood, de getallen 5, 4, 2 en 1. Deze verzameling behaalde punten geven we aan met P, dus:
$P = \{5, 4, 2, 1\}$
We hebben nu een relatie van L naar P. Met een plaatje is dit bijvoorbeeld voor Zweden als volgt uit te beelden:

Zweden → 4

Denken, doen en begrijpen, deel 1

Met name de relatietaal (produktverzamelingen e.d.) en de verzamelingenbouwer {..|...} kunnen zonder meer gemist worden. Over de logische symbolen en over de uitbreiding van dit lijstje kan worden gediscussieerd.
Een terechte vraag is bijvoorbeeld of lbo-mavo leerlingen meer moeten kennen van en kunnen met de formele wiksundige taal dan een vwo-leerling met wiskunde A. Zie de formuleringen in de wiskunde A examenopgaven.

Eindexamen Wiskunde A 1986

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. De formule die het verband aangeeft tussen M en de energie P per minuut, die nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden, is:

$$P = 0{,}017\, M^{0{,}75}.$$

Er geldt: 1 liter zuurstof per minuut komt overeen met 350 energie-eenheden.

Men vermoedt al jaren dat de zonnevlekken invloed hebben op het weer op aarde. De regenval in Fortaleza (Brazilië) laat zich beschrijven met het volgende wiskundige model

$$R = 140 + 35 \sin\left(\frac{\pi}{11}t\right),$$

waarbij R het aantal cm regen in een bepaald jaar en t de tijd in jaren is. Het tijdstip $t = 0$ valt samen met het jaar 1905.

Een trend in de lbo-mavo examens?

Het uittreksel van het nomenclatuurrapport bij het leerplan van 1968 (zie het Vademecum voor de wiskundeleraar) is indertijd door de CEVO als richtlijn voor de formulering van de examenopgaven overgenomen. Vervolgens hebben de opstellers van de examenopgaven de actieve beheersing van de taal van de verzamelingen, de relaties en de logica tot leerdoel verheven en met name in de meerkeuzevragen veel ruimte voor de toetsing van dat leerdoel ingeruimd. Ondanks intensieve training van lbo-mavo leerlingen in deze formele taal en de toetsopgaven bleven dat type opgaven grote struikelblokken. Leerlingen van 3 havo-vwo, niet getraind in dit taalgebruik, konden de mavo-examens dan ook niet maken!

De laatste jaren lijkt er een onuitgesproken trend in de formuleringen van de examenopgaven te zitten. Het tellen van de opgaven, die gebruik maken van de gewraakte formuleringen, leidt tot verrassende resultaten. De volgende tabel van de aantallen meerkeuzevragen, die van de bedoelde taal gebruik maken, spreekt voor zich.

Examen mavo-D	1979, I	1979, II	1980, I	1980, II
aantal opgaven	8	11	8	9

1981, I	1981, II	1982, I	1982, II	1983, I
10	8	8	9	9

1983, II	1984, I	1984, II	1985, I	1986, I	1986, II
6	5	5	4	3	4

Examen mavo-C	1983, I	1983, II	1984, I	1984, II	1986, I	1986, II
aantal opgaven	4	7	4	4	2	2

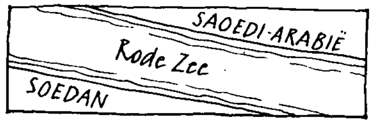
Bij de zogenaamde 'open' vragen speelt het bedoelde formele taaltje nauwelijks een rol.

Als de voorgestelde vereenvoudigingen in de nomenclatuur te zijner tijd door de CEVO worden overgenomen, zoals met de huidige nomenclatuur is gebeurd, dan behoeft er maar weinig aan de formulering van het examen als geheel worden veranderd. Veel belangrijker voor docenten en leerlingen in het lbo-mavo is, dat er geen energie meer besteed hoeft te worden aan de restanten van de formele taal, ontleend aan de verzamelingenleer, de logica en de opvatting dat een functie een bijzondere relatie is. De vrijkomende ruimte kan aan zinvolle verbindingen tussen de wiskunde en de werkelijkheid worden besteed.

Meer ruimte voor zinvol wiskunde-onderwijs

Is het facultatief stellen van de formele notaties rommelen in de marge of kan het tot een zinvolle verrijking van het wiskunde-onderwijs bijdragen? Met andere woorden komt er behoorlijk wat ruimte en tijd vrij, als we de verzamelingtheoretische opbouw en taal gewoon weglaten uit ons wiskunde-onderwijs? En wat blijft er van de didactische opbouw over?
De hoofdstukken over verzamelingen en relaties kunnen grotendeels worden overgeslagen.
Het onderwerp 'puntverzamelingen' kan, ontdaan van het taaltje, weer boeiend worden. De functielijn vraagt om een nadere analyse. Kunnen de relaties gemist worden?

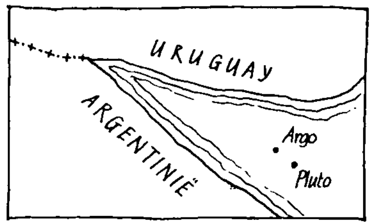
8 De kusten van deze twee landen lopen vrijwel evenwijdig. Hoe moet de zee worden verdeeld, als elk punt van de grenslijn even ver van beide landen ligt?



9a Zoek eens uit hoe je de zee verdeelt, als de kusten van twee landen een hoek met elkaar maken.

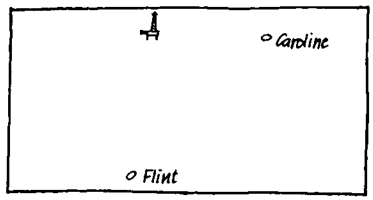
b 1 mm op de kaart is in werkelijkheid 2 km. Meet de afstand van het schip Argo tot Uruguay en tot Argentinië.

c Heeft het schip Pluto gelijke afstanden tot Uruguay en Argentinië? Hoe groot zijn die afstanden?



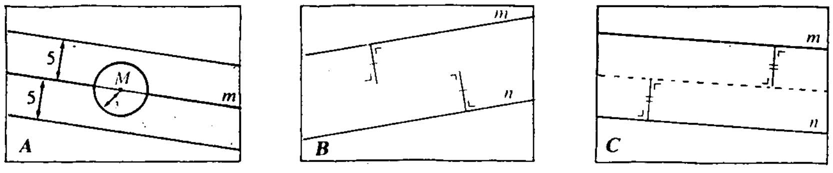
10a In de Grote Oceaan liggen de eilandjes Flint en Caroline, stippen op de kaart.
Verdeel de zee tussen deze eilandjes.

b Op de plaats van het boortorentje wordt olie aangeboord. Welk eiland heeft recht op die olie?



b Zoek uit welke van deze notaties bij de drie plaatjes hieronder horen:

I $\{P \in V \mid d(P, m) = d(P, n)\}$
II $\{P \in V \mid d(P, M) \leqq 5 \text{ en } d(P, M) \geqq 3\}$
III $\{P \in V \mid d(P, m) \leqq 5 \text{ en } d(P, M) \geqq 3\}$
IV $\{P \in V \mid d(P, m) < d(P, n)\}$



c Maak een tekening die bij de overgebleven notatie hoort.

Moderne Wiskunde, vierde herziene editie, deel 5 hm

De functielijn

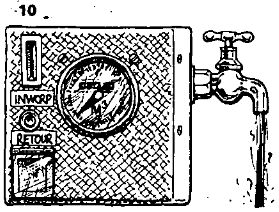
Hoewel dit niet expliciet in het leerplan is vermeld, zijn de opstellers ervan uitgegaan, dat een wiskundig en didactisch juiste invoering van het begrip functie via het begrip relatie moet verlopen. De functie als een bijzondere relatie. Freudenthal heeft al in een vroeg stadium dit uitgangspunt op wiskundige en didactische gronden aangevochten. Vredenduin heeft onlangs in 'Ik was wiskundeleraar' opgemerkt, dat deze invoering in didactisch opzicht als mislukt is te beschouwen.
Bladerend in de schoolboeken valt op dat methoden zoals 'Denken, doen en begrijpen', 'Getal en Ruimte', 'Moderne Wiskunde abcd' onverkort deze opbouw hebben gehandhaafd en er veel tijd aan besteden. Het alternatief is eveneens al lang geleden door Freudenthal aangegeven. De functie als *het verband tussen twee grootheden.* Met een sterk accent op de grafieken is dit didactisch uitgangspunt door de wiskundegroep van de SLO uitgewerkt. In de vierde editie van Moderne Wiskunde komen verschillende benaderingen naast elkaar voor. De Nederlandse bewerking van de Engelse SMP (Wiskunde Lijn) volgt dezelfde lijn als Freudenthal bepleitte. In leerjaar 1 regels opsporen, die het verband tussen twee grootheden (bijvoorbeeld aantallen witte en blauwe tegels) aangeven. De machientjestaal beschrijft die relaties. Bij verbanden en machientjes worden grafieken getekend en geïnterpreteerd. De formuletaal beschrijft het verband tussen twee grootheden in leerjaar 2, terwijl in leerjaar 3 de pijltjesnotatie voor puur analytische functies wordt ingevoerd. De relaties worden bij de vergelijkingen van krommen en vlakdelen behandeld.

Een voorstel

De leeftijdsgroep van 12-16 jaar dreigt in de vernieuwing van het leerplan het laatst aan beurt te komen. Eerst vwo-bovenbouw (wiskunde A en ruimtemeetkunde), straks havo (Hawex) en jaren later de onderbouw havo-vwo en lbo-mavo. Met name de laatste groep heeft door het afsluitend examen te weinig ruimte om de ballast van onnodige formele notaties over boord te zetten. De gesignaleerde trend in de examenopgaven moet daarom expliciet worden omgezet in het facultatief stellen van bepaalde notaties.
Het bestuur van de NVvW kan een werkgroep instellen, die in overleg met de nomenclatuurcommissie voor de havo-vwo bovenbouw en met de CEVO een voorstel uitwerkt, dat op korte termijn tot de gewenste aanpassing leidt.

Grafieken en machientjes

10

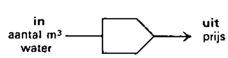


Het waterleidingbedrijf brengt haar klanten voor geleverd water *f* 0,75 per m³ (kubieke meter) in rekening.

(a) Neem deze tabel over en vul hem verder in. Vertel in je eigen woorden hoe je rekent.

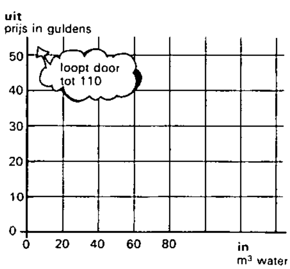
aantal m³	prijs
1	*f* 0,75
20	
40	
60	
80	
100	
120	
140	

(b) Je kunt bij deze berekening ook een machientje tekenen. Neem over en vul in:



(c) Schrijf de gevonden m³ water en de prijzen die erbij horen, in de vorm van getallenparen. Bijvoorbeeld: (1; 0,75).

(d) Neem deze assen over en teken de getallen erin.



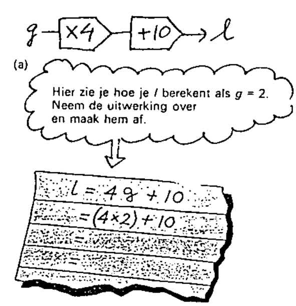
Wiskunde Lijn, deel 1b

12

Bij een andere veer past de formule $l = 4g + 10$.

De formule in woorden:
de lengte van de veer krijg je door het gewicht met 4 te vermenigvuldigen en er 10 bij op te tellen.

Het machientje voor deze formule ziet er zo uit:



Wiskunde Lijn, deel 2a

Recreatie

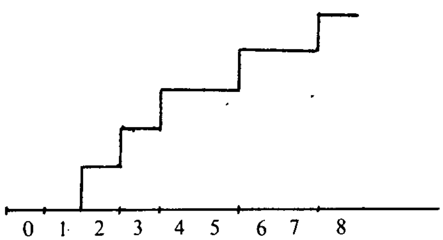
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Prof. G. Crombez, die de didactiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit Gent verzorgt, heeft het initiatief genomen voor de wiskundeleraren die de laatste zeven jaar aan de RU Gent afgestudeerd waren een studiedag te organiseren (op 29-09-1986). Ze hernieuwen zo het onderling contact en krijgen enkele voordrachten te horen waarvan de inhoud voor hun leraarschap relevant is. Er waren twee vrouwelijke en twee mannelijke sprekers, een evenwicht dat bij onze zuiderburen normaal is. Aan de voordracht van Prof. Crombez ontleen ik de volgende drie opgaven.

560 Een klas bestaat uit 45 leerlingen, waaronder 25 jongens. Van de 45 leerlingen zijn er 30 goed, waarvan 16 jongens. Er doen er 28 aan sport en hieronder zijn 18 jongens en 17 goede leerlingen. Verder weten we nog dat er 15 jongens goed zijn en aan sport doen. Hoe is deze klas samengesteld?

561 Hoeveel rijen van n cijfers 0 of 1 zijn er mogelijk waarin geen twee cijfers 1 naast elkaar voorkomen?

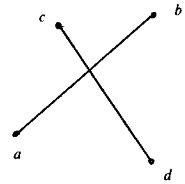
562 Een trap bestaat uit treden. Deze hebben elk een lengte 1 en een hoogte 1 of een lengte 2 en een hoogte 1. Men gaat dus telkens 1 naar rechts en 1 omhoog of 2 naar rechts en 1 omhoog. Hoeveel trappen met lengte n zijn er mogelijk?
Voorbeeld van een trap met lengte 8:



Oplossingen

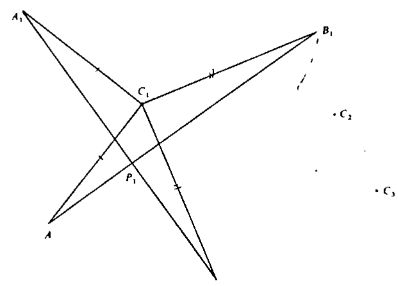
556 Dr. K. A. Post (Eindhoven) maakte me er attent op dat nr. 556 identiek is met nr. 546. Hij merkte op dat als de opgaaf toch tweemaal voorkomt, hij nog wel een betere oplossing heeft. Ik maak er een dankbaar gebruik van. Hij luidt als volgt.
n punten geven $\frac{1}{2}(n-1)!$ gesloten gebroken lijnen, waarvan er minstens één qua lengte minimaal is. Deze gesloten gebroken lijn is verstoken van dubbelpunten. Want stel $[ab]$ snijdt $[cd]$. Vervang $[ab] \cup [cd]$ door hetzij $[ac] \cup [bd]$, hetzij $[ad] \cup [bc]$.

De totale lengte wordt kleiner (wegens de driehoeksongelijkheid) en één van deze twee gevallen behoudt de eigenschap een samenhangende rondrit langs alle punten te zijn. Tegenspraak!



557 70% van een verzameling mannen hebben bruine ogen, 75% donker haar, 85% zijn langer dan 1,70 m en 90% wegen meer dan 140 pond.
Hoeveel % minstens heeft alle vier kenmerken?
70% en 75% hebben minstens 45% gemeen.
45% en 85% hebben minstens 30% gemeen.
30% en 90% hebben minstens 20% gemeen.
Minstens 20% heeft dus alle vier kenmerken.

558 A en B zijn keien, C_1, C_2, C_3 kokospalmen. Een piraat bepaalt P_1, zoals in de figuur is aangegeven, en analoog P_2 en P_3. Hij begraaft een schat in het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek $P_1P_2P_3$. Na enige jaren komt hij terug. De drie palmen zijn verdwenen. Hoe vindt hij de schat?
Men ziet gemakkelijk dat $\angle AP_1B = 90°$. Noem het midden van AB punt M. Dan is $P_1M = \frac{1}{2}AB$. Analoog $P_2M = P_3M = \frac{1}{2}AB$. De schat is dus in M begraven. En de keien waren er gelukkig nog.



559 $(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\ldots(3^{2^n}+1)$ (1)
is gelijk aan de som van alle machten van 3 waarvan de exponent de som is van een deelverzameling van $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n\}$.
Een dergelijke som kunnen we tweetallig schrijven als $a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}$. Dit zijn, tweetallig geschreven, alle getallen met $n+1$ cijfers vanaf $000\ldots0$ tot en met $111\ldots1$.
(1) is dus gelijk aan $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2^{n+1}-1}$.
Dus aan $\dfrac{3^{2^{n+1}}-1}{3-1}$.

Multiple choice

Nanda Querelle

Na Pasen is het schooljaar om. De examenklassen zijn weg en daarvoor in de plaats komt bijzitten, vergaderen, corrigeren en overleggen en dit in verschillende volgorde tot vervelens toe. Vergeet ik nog het weer lesgeven aan herkansers. Is dat nu erg? Nou nee, maar er zitten minder prettige kanten aan. Een van die kanten wil ik belichten.
Of je wilt of niet, maar in die laatste schoolmaanden loop je herhaaldelijk tegen het Cito op. En Cito betekent meestal ergernis. Ik wil uitleggen waarom. Als bijzitter blader je natuurlijk ook even door het werk dat de kandidaten dit keer voorgeschoteld krijgen. En als je de verschillende examens naast elkaar legt, dan verbaas je je erover dat er in de eindexamenklassen eigenlijk geen vak multiple choice op het lesrooster staat.

Ik vermoed dat de resultaten in niet geringe mate zullen verbeteren indien de kandidaten enig inzicht wordt bijgebracht in de verschillende verwachtingen die men heeft bij het stellen van de vragen bij de diverse vakken.
Er zijn nogal wat strategieën die je moet beheersen om de multiple choice te lijf te gaan. Soms moet je bijvoorbeeld alle antwoorden eerst lezen, dan weer dien je de opgave eerste volledig te maken en dan pas het bijpassende antwoord te zoeken.

Deze en volgende opgaven koos ik uit de mavo-examens.
Bij de talen moet je blijkbaar de vraag lezen, maar ook alle antwoorden; de evident verkeerde wegstrepen en uit degene die overschieten de beste nemen. Het komt nogal eens voor dat collega's van mening verschillen over dat laatste, dus erg vanzelfsprekend schijnt het niet te zijn (23).

Waar kiest u voor? Of twijfelt u nog, denkend aan een recent bericht over de invloeden van automatisering? (33)

Het meest verraderlijke lijkt me het feit dat sommige beweringen een beetje waar worden, of zoals uit de volgende opgave blijkt best waar zijn, maar niet uit deze gegevens af te leiden en daarom nú niet waar zijn.

23 woman should. But for a woman to leave the projection of het home and venture out into the rough world of men, competing with them in business, rubbing shoulders with them, being exposed to rudeness and scandalous rumours... Especially when she wasn't forced to do it, when she had a husband more than sufficiently able to provide for her!

Margaret Mitchell, Gone with the wind

32
The three dots after the word 'rumours' (line 23) could be replaced by:
a ,it was absurd!
b ,it was not worth while!
c ,it would need a stronger character than hers!
d ,it would not be tolerated by men!

33 De onderstaande uitspraak kan zonder meer juist zijn (a), uitsluitend juist zijn met één of meer extra bepalingen (b, c of d) of in alle gevallen onjuist zijn (e).
Uitspraak: Als in Nederland de totale produktie toeneemt, zal de werkloosheid afnemen.

Bepaling 1 als de omvang van de beroepsbevolking gelijk blijft.
Bepaling 2 als de gemiddelde arbeidsproduktiviteit gelijk blijft.

a De uitspraak is zonder meer juist.
b De uitspraak is alleen met bepaling 1 juist.
c De uitspraak is alleen met bepaling 2 juist.
d De uitspraak is alleen juist met bepaling 1 en met bepaling 2.
e De uitspraak is in alle gevallen onjuist.

29 In het diagram zijn twee soorten kolommen aangegeven:
- de zwarte kolommen geven aan hoeveel procent van de wereldvoedselproduktie in dat deel van de wereld plaatsvindt;
- de gespikkelde kolommen geven aan hoeveel procent van de wereldbevolking in dat deel van de wereld woont. (Zie figuur 1.)

Uit het diagram blijkt dat
a de Europeanen aan het in Europa geproduceerde voedsel voldoende hebben.
b Ongeveer de helft van de bevolking van Oost-Azië naar Noord-Amerika moet emigreren.
c Australië per hoofd van de bevolking de grootste voedselproduktie heeft.

In de wiskundeopgaven ben ik het beste thuis en daarom kan ik daar meer onderscheid maken. Ik noem eerst de opgaven en geef dan aan wat mijns inziens de vereiste multiple choice-strategie behelst.

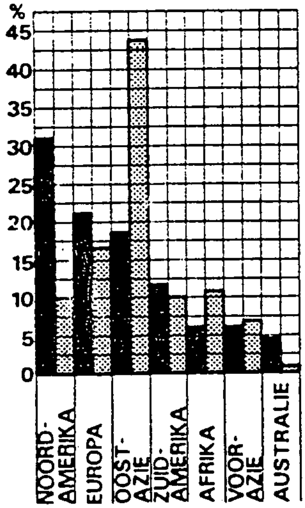
24 Van kubus $ABCD.EFGH$ is de lengte van een ribbe 2. P is het midden van lijnstuk EH en Q is het midden van lijnstuk GH. (Zie figuur 2.)
Voor de grootte van α van hoek PBQ geldt
a $\alpha \leqq 15°$
b $15° < \alpha \leqq 20°$
c $20° < \alpha \leqq 25°$
d $25° < \alpha$

* Je krijgt een opgave, die je moet maken en daarna zoek je onder de gegeven antwoorden jouw antwoord.

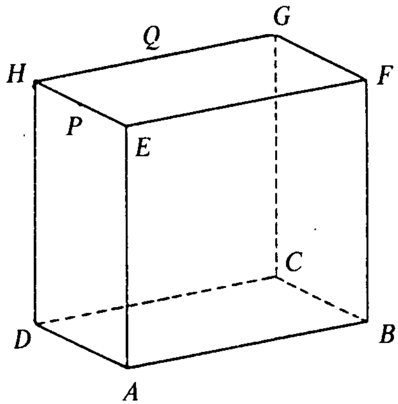
3 $\varnothing$ is de oplossingsverzameling van de vergelijking
a $x^2 - 2x - 2 = 0$
b $x^2 - 2x - 1 = 0$
c $x^2 - 2x + 1 = 0$
d $x^2 - 2x + 2 = 0$

* Je krijgt geen opgave, maar een antwoord. Dan ga je de bij de antwoorden gegeven opgaven maken, totdat je gekomen bent bij het gegeven antwoord.

4 $x(x + 10) =$
a $(x + 5)^2 + 25$
b $(x + 5)^2 - 25$
c $(x - 5)^2 + 25$
d $(x - 5)^2 - 25$



Figuur 1



Figuur 2

* Je krijgt geen opgave en ook geen antwoord, maar een algebraïsche vorm. Bij de alternatieven staan ook algebraïsche vormen en één van alle is gelijk aan de gegeven vorm. Zoek de juiste bij elkaar. Zulke opgaven zijn voor leerlingen meestal alleen maar tot een goed einde te brengen door alles uit te werken en dan te vergelijken wat bij wat past.

5 Van nevenstaande rechthoek (zie figuur 3) $ABCD$ is $AB = 2\ BC$.
Punt M is het midden van lijnstuk CD.
Verder is een deel getekend van cirkel (B, BC).
Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt
a $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PB \geqq BC$
b $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PB \leqq BC$
c $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PB \geqq BC$
d $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PB \leqq BC$

* De opgaven over puntverzamelingen in het vlak zijn in de meeste gevallen het eenvoudigste op te lossen door een punt in het gearceerde vlakdeel te nemen en door substitueren of nameten de alternatieven te vergelijken met hetgeen jij hebt. Het kan echter ook gebeuren dat je de opgave gewoon zelf moet maken, zoals je in de les ook deed.

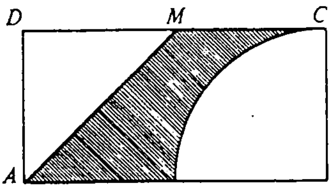
24 De verzamelingen $V = \{(x, y) \mid 3y - x = 5\}$ en $W = \{(x, y) \mid y + 2x = 4\}$ zijn gegeven.
Als $V \cap W = \{(p, q)\}$, dan geldt

a $(p, q) \in \{(x, y) \mid 3y - 2x = 1\}$
b $(p, q) \in \{(x, y) \mid 2y - 3x = 1\}$
c $(p, q) \in \{(x, y) \mid -2y + 3x = 1\}$
d $(p, q) \in \{(x, y) \mid -3y + 2x = 1\}$

* Je krijgt een opgave die je moet oplossen.
Met die gevonden oplossing kun je dan weer de opgaven bij de alternatieven te lijf.

Dit zijn wel de meest voorkomende gevallen.
Waar ik nu ieder jaar om deze tijd weer zo moedeloos van word, is het gemak waarmee opgavenmakers de hele zaak op een hoop gooien en willekeurig alle soorten opgaven door elkaar over de weerloze kandidaten uitstrooien. Alsof het er totaal niet toe doet.
Erger, ik heb het sterke vermoeden dat men in het Cito nooit de moeite neemt eens te onderzoeken wat men zoal binnen de verschillende vakken pleegt te doen en wat voor problemen dit voor de leerlingen moet geven.
Men schijnt er geen weet van te hebben dat de manier van vragen een belangrijke rol speelt bij het resultaat. Of wil men het niet weten?

Met name binnen mijn leao-groep hoor ik het laatste halfjaar leerlingen verzuchten: 'oh, waarom zeggen ze dan niet gewoon dat ik dát moet doen!'. Het probleem voor hen is steeds eerst kiezen hoe moet ik het gaan doen en dan pas waar gaat het wiskundig over. En uiteraard kies je ook nogal eens

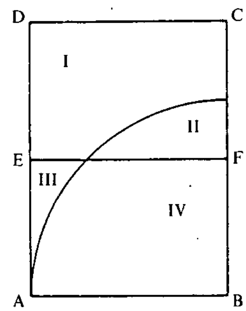


Figuur 3

voor de verkeerde manier, met het onaangename gevolg dat daardoor een verkeerd antwoord op de stip ligt.

18 Hiernaast is de rechthoek $ABCD$ getekend en een deel van de cirkel (B, BA).
E en F zijn de middens van de zijden AD en BC.
P is een punt waarvoor geldt
$PB \leqq AB \wedge d(P, AB) \geqq d(P, DC)$.
P kan liggen in vlakdeel

a I
b II
c III
d IV



Figuur 4

Dit is een goed vraagstuk om op te lossen zoals het geleerd is, namelijk door arceren nagaan welk gebied voldoet. Door de manier waarop de antwoorden gegeven zijn kun je verwachten, dat leerlingen voor de 'probeer de antwoorden' methode kiezen en zeer waarschijnlijk de fout ingaan.

Uit alle papieren die vanuit Arnhem de laatste maanden de school zijn binnengekomen kun je afleiden dat het allemaal nog erger kan en waarschijnlijk zal worden. 'Dit jaar wordt nog uitsluitend gewerkt met vragen waarbij slechts één alternatief goed is'. Het stond er wat deftiger, maar ik kan het zo gauw niet vinden.
Als binnenkort de leerlingen ook nog te maken kunnen krijgen met de mogelijkheid dat meer dan één antwoord goed is, dan zullen de resultaten nog beter een antwoord geven op de vraag, hoe goed ben je in multiple choice dan op wat weet je van dit onderwerp.
De verwarring omtrent het kiezen van de juiste oplosmethode wordt nu nog groter. Bovendien wordt een opgave met zeg 4 alternatieven nu voor de leerlingen veranderd in 4 ja/nee opgaven gegroepeerd om één gegeven.
Je krijgt als extra dat je uitermate logisch moet kunnen denken om te kunnen beslissen of in dit

geval antwoord b goed is. Een deeloplossing kan door de subtiele manier van vragen de ene keer wèl en de andere keer nìet goed zijn.

2 Uit de figuur is af te lezen
dat $f(x) > g(x)$ geldt

a voor elke $x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle$
b voor elke $x \in \langle 1, 2 \rangle$
c voor elke $x \in \langle 2, \rightarrow \rangle$
d alle vorige antwoorden zijn fout.

Als er had gestaan 'de' oplossingsverzameling is, dan was dat het goede antwoord geweest. Het lijkt me heel erg slecht om dit te doen.

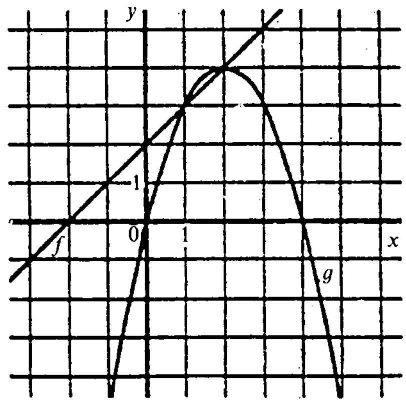
4 De oplossingsverzameling van
$x^2 + 2x + p = 0$ is *niet* leeg voor

a $p = -2$
b $p = -1$
c $p = \ \ 1$
d $p = \ \ 2$
e alle vorige antwoorden zijn fout.

Misschien leuk voor mensen die wiskunde als hobby bedrijven, maar mijn leerlingen is niet duidelijk te maken dat wanneer het antwoord moet zijn $x > 2$ het antwoord $x = 5$ géén punten oplevert, terwijl het bij multiple choice wel goed kan zijn.

Ik vermoed dat ook intelligentere leerlingen nu onzeker worden. Voor de veiligheid zullen ze alle antwoorden moeten nalopen, want wie weet schuilt er een addertje onder het gras, dat jij niet gezien had.
Kunt u zich voorstellen dat je wanneer je behept bent met het verlangen iets zinnigs te doen met kinderen, je diep zucht en je schouders ophaalt bij het zien van dit gedoe?
Hier zit het onderwijs echt niet op te wachten.

Nou ben ik behalve lerares wiskunde ook nog lid van de Cevo, waar de wiskundeopgaven vastgesteld worden. In die commissie is veel strijd geleverd voor een eenvormige aanpak van de multiple choice opgaven voor wiskunde. Het lijkt er nu op dat de inspanningen resultaten gaan afwerpen. Volgens de laatste berichten streeft men ernaar de examenopgaven in de doevorm te geven zodat het



Figuur 5

de kandidaten duidelijk is wat er moet gebeuren. Hun antwoord vinden ze dan (mag je hopen) bij de keuzemogelijkheden.
Een stapje in de goede richting?
Wellicht; de praktijk zal het leren.
Daarmee zijn onze leerlingen evenwel nog lang niet uit de narigheid. Zij moeten bij elk vak opnieuw weer raden wat precies op het examen van hen gevraagd wordt en hoe ze de opgaven moeten begrijpen. Bij wie of waar moeten we zijn om te bewerkstelligen dat er over de hele linie meer uniformiteit komt in dat multiple choice-gedoe?

Over de grens

Hans ter Heege

Wiskundige aardrijkskunde

Afstanden op aarde kunnen worden gezien als lengten van lijnstukken op een bol. We meten die afstanden echter op de kaart. Dit levert over grotere afstanden problemen op. De afstand Uddel-Speulde kan op de kaart van de Veluwe worden gemeten en vervolgens met behulp van de schaal van de kaart worden omgerekend in de reële afstand. Wiskundige aardrijkskunde of aardrijkskundige wiskunde? Ik weet het niet. Wel is duidelijk dat in toepassingsgericht wiskundeonderwijs van aardrijkskundige contexten dankbaar gebruik wordt gemaakt. Niet alleen het startpunt wordt gevonden in een aardrijkskundige context, ook de berekeningen en uitkomsten moeten in de gekozen context geïnterpreteerd worden.

Een centraal proefwerk aardrijkskunde

Mijn dochter zit in de brugklas en heeft op 23 september haar eerste c.p. aardrijkskunde.
Een van de opdrachten luidt:

a Wat is de afstand Uddel-Speulde (in vak E-3 van de Bosatlas, blz. 12-13)
  - in cm op de kaart
  - in km in werkelijkheid

b Wat betekent de paarse kleur ten oosten van Ede (vak E-4)?

c Hoeveel inwoners heeft Nordhorn (vak H-3)?

Zonder inzicht in wiskundige fenomenen is deze vraag niet te beantwoorden. De wiskundige kennis die aanwezig wordt verondersteld is veelzijdig. Zonder volledigheid na te willen streven noem ik bijvoorbeeld:

- de symbolentaal van de legenda:
  - paars is *in dit geval* een kleur die heide betekent. Er zijn kaarten waarbij paars bijvoorbeeld de grondsoort laagveen symboliseert of een provincie wordt met de paarse kleur aangegeven ter onderscheiding van omliggende provincies, landen, enzovoorts.
    Ik noem hier drie geheel verschillende functies van paars: de ecologische, de geologische en de staatkundige functie.
  - de grootte van een plaats (dorp, stad, grote stad, enzovoorts) is aangegeven door de vorm van die plaats op de kaart: ●, ○, ⊙, 

    Maar deze indeling acht men in de Bosatlas niet nauwkeurig genoeg. Een stad met de plaatsnaam in kapitale letters is groter dan een stad die met kleine letters op de kaart is aangegeven. Dus:

     Nordhorn  NIJMEGEN

    Een streep onder de plaatsnaam geeft aan dat de stad hoofdstad is van een provincie (bijvoorbeeld). Dus:

     <u>ARNHEM</u>

    Ook hier weer diverse symboliseringen door elkaar heen gebruikt. Ook voor degene die de symboliseringen begrijpt, blijft het parool 'koppie erbij houden'.
- De coördinatentaal van de kaart.
  Deze coördinatentaal heeft minstens twee vormen. In de bovenstaande opdracht wordt gebruik gemaakt van de hokjescoördinaten (schaakbordnotatie): E-3.
  Als op kaarten grotere gebieden staan, wordt vaak gebruik gemaakt van meridianen en breedtecirkels:
  Nijmegen 51°50'; 5°50'
  wat betekent dat Nijmegen op 51°50'NB en

5°50'OL ligt. De specifieke notatie hiervan in graden en minuten is een keuze die ook anders had kunnen zijn. Zo geeft mijn Duitse atlas:
Nijmegen 05/n51
wat betekent 'in het vakje' dat omsloten wordt door lengtegraden 5 en 6(OL) en breedtegraden 51 en 52(NB).
Ik ga op bovengenoemde wiskundekennis die functioneert binnen het startend aardrijkskundeonderwijs in de brugklas niet verder in. Het gaat veelal om afspraken die gemaakt worden c.q. geleerd moeten worden door kinderen.
Ik ga nu in op het a-gedeelte van de opdracht, waarin gerekend moet worden. De vraag is of kinderen dit rekenwerk kunnen en of ze de antwoorden kunnen interpreteren.

Rekenen in de aardrijkskundeles

Mijn dochter bleek geen idee te hebben van de gevraagde berekeningen. Sterker nog, ze wist niet wat ze doen moest. Haar antwoorden waren:
Uddel-Speulde
op de kaart 100.000 cm
in werkelijkheid 10 km.

Laat ik aannemen dat mijn dochter begrijpt dat de kaart een bepaalde weergave van de werkelijkheid is. Dat is niet zo voor de hand liggend. Je kunt immers de kaart zelf ook als (schoolse) werkelijkheid interpreteren. Hoe het ook zij, in alle gevallen is mijn dochters antwoord onbegrijpelijk. Temeer daar de schaal van de kaart 1 : 460.000 bedraagt.
Wat zou er gebeurd kunnen zijn? Wel, ik denk dat ze niet op het idee is gekomen de afstand Uddel-Speulde op de kaart te meten. Er stond ook niet bij dat je het moest *meten*, met een lineaal. (In opdrachten op de lagere school staat dat er vaak wel bij.)
Ze heeft de afstand daarvan maar geschat: 10 kilometer leek haar een acceptabele afstand voor zo'n klein stukje op de kaart. Vervolgens heeft ze die uitkomst uitgedrukt in centimeters en daarbij een fout gemaakt. Het metriek stelsel is op de basisschool wel aan de orde geweest, maar de betekenis van de omzetting in diverse maten wordt lang niet altijd begrepen.

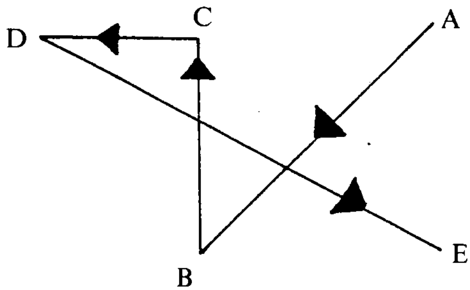
Ik heb hierboven de fouten van mijn dochter verklaard: er blijken lacunes te zijn, deels in het schaalbegrip, deels in het begrip van het metrieke stelsel gelegen. Maar hiermee wil ik allerminst beweren dat de antwoorden die zij gaf uit de lucht gegrepen zijn, wat in eerste instantie toch de gedachte zal zijn. Ze interpreteert de getallen in de context van afstanden ook goed. Zo verdedig ik haar fouten.
Wat is nu het beoogde antwoord? De docent bespreekt het proefwerk de volgende les. Mijn dochter schrijft de uitleg op het proefwerkblaadje:
1,1 cm → 1,1 × 4,6 = 5,06 km.
Dit betekent: de afstand op de kaart tussen Uddel en Speulde is 1,1 centimeter. Omdat de schaal 1 : 460.000 is, volgt daaruit dat de afstand in werkelijkheid 1,1 × 4,6 = 5,06 km is. Bondig en kort.
Zou mijn dochter het begrepen hebben? Is deze uitleg niet te veel op 'het maniertje' gericht? Ik denk het wel. De uitkomst 5,06 km (kommagetallen) wordt niet anders dan als rekenuitkomst beschouwd. Het antwoord moest 5,06 km zijn en mocht niet worden afgerond tot 5 km, zo vertelde mijn dochter er nog bij. Laat ik dit maar laten voor wat het is. Ik acht een antwoord als 5,06 km in deze context fout, althans van een nauwkeurigheid die niet in overeenstemming kan zijn met de waarheid. Want de meting op de kaart is – naar ik aanneem – tot op 1 millimeter nauwkeurig, wat inhoudt dat de afstand tussen de twee dorpen op de kaart ergens tussen 1,05 en 1,15 cm ligt. Dit komt overeen met een werkelijke afstand tussen 4,83 km en 5,29 km, een speling van 460 meter dus. Het mag dus merkwaardig genoemd worden dat afstanden tussen plaatsen op 60 meter nauwkeurig, de breedte van een voetbalveld, kunnen worden bepaald. In Madurodam misschien, maar niet op de Veluwe.
Mijn conclusie is dat, alles overdenkend, hoge eisen aan de kinderen worden gesteld. Of alles door de wiskundige beugel kan, is een minder interessante vraag dan of alles wel didactisch verantwoord is. Ik vermoed dat hier een aanwijzing voor de problemen die brugklassers met het vak aardrijkskunde kunnen hebben, kan worden gevonden.

Meetkunde in de aardrijkskundeles

Een meetkundig georiënteerde vraag in het c.p. van mijn dochter nu. Een vierkeuzevraag:

Op de tekening hieronder loop ik vanuit A via B, C en D naar E achtereenvolgens in:
a Z.W. – Z. – O. – N.O. richting
b Z.W. – N. – W. – Z.O. richting
c N.O. – Z. – O. – Z.O. richting
d N.O. – Z. – W. – N.W. richting

Ik heb veel kritiek op deze opdracht, omdat er geen richting wordt 'gedefinieerd'. Er wordt eigenlijk als vanzelfsprekend aangenomen dat de bovenkant van het papier het noorden is.



Ook al accepteren we deze omissie in de opgave, dan nog blijkt geen van de antwoorden te voldoen omdat DE niet naar het Zuidoosten is gericht, maar naar Oostzuidoost. Of leerlingen dit op zullen merken, is echter de vraag. De opgave is al moeilijk genoeg.

In een schriftelijke overhoring, vier dagen voor het c.p., kreeg mijn dochter de volgende opgave.

Er zijn 2 soorten luchtfoto's:
1e loodrecht naar beneden.
2e vogelvluchtopnamen.
Welke heb je nodig als je
a wilt weten hoe hoog een kerktoren is?
b een afstand nauwkeurig wilt weten?

Het bedoelde antwoord onder b. is 'loodrecht'. Onder stringente voorwaarden kan dit antwoord worden geaccepteerd. Eén van de belangrijkste voorwaarden is dat de foto van niet te grote hoogte is genomen. Foto's uit kunstmanen bieden bijvoorbeeld geen mogelijkheid om grotere afstanden nauwkeurig te meten op de bol die aarde heet. Erger is het beoogde antwoord van de a-vraag: het is niet mogelijk om de hoogte van een kerktoren af te leiden uit een vogelvluchtfoto. Hoewel, . . ., misschien met nauwkeurige hoekmeting en goniometrische hulp.

Logica in de aardrijkskundeles

Meerkeuzevragen zijn soms het onderwerp van vrolijkheid. Wat zien we bijvoorbeeld in de volgende twee opgaven van het centrale proefwerk aardrijkskunde die mijn dochter, brugklasleerling, op 23 september voorgeschoteld kreeg.

Waarom is een kaart meestal duidelijker dan een luchtfoto?
a Omdat op een kaart nooit mensen staan.
b Omdat op een kaart altijd namen staan.
c Omdat je uit een vliegtuig geen kleurenfoto's kunt maken.
d Omdat een kaart een vereenvoudiging van de werkelijkheid is.

Antwoord c valt direct (?) af: uit vliegtuigen kun je wel kleurenfoto's maken. Antwoord a kan juist zijn: er zijn kaarten waarop mensen staan, getekende mensen. Elk 'poppetje' staat bijvoorbeeld voor één miljoen inwoners. Maar in de Bosatlas staan deze kaarten niet. In de statistiek komen we ze echter wel tegen. Conclusie: antwoord a zal niet bedoeld zijn. Blijven b en d over. Op een kaart staan vaak (niet altijd) namen. Als je een probleem hebt waarbij die namen je helpen is die kaart met namen dus duidelijker dan een luchtfoto. Of, duidelijker? In ieder geval bruikbaarder. Conclusie: antwoord b gooit hoge ogen.
Resteert d. Dit is het beoogde antwoord. Het is echter twijfelachtig of een kaart een vereenvoudiging is van de werkelijkheid. Ik heb in de Bosatlas kaarten gezien die . . . De lezer begrijpt het al. Een kaart is enerzijds een reductie van de werkelijkheid, anderzijds een interpretatie van de werkelijkheid die bij tijd en wijlen uiterst gecompliceerd kan zijn. Zonder te veel commentaar te geven mag geconcludeerd worden dat de volgende opgave thuis hoort in het rariteitenkabinet van de toetswereld.

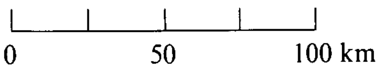
Twee uitspraken:
I Van vogelvluchtopnamen kunnen goed kaarten gemaakt worden.
II Van loodrechtfoto's kun je alle inrichtingselementen goed herkennen.
a I is fout en II is goed.
b I is goed en II is fout.
c I en II zijn beide fout.
d I en II zijn beide goed.

Zonder te veel commentaar. Het enige commentaar dat op zijn plaats lijkt, is 'Wie lust er nog peultjes?'

Rekenen met schaal

Een belangrijk onderdeel uit het aanvankelijk aardrijkskundeonderwijs van het voortgezet onderwijs is het rekenen met behulp van schaalgegevens. In het c.p. van mijn dochter komen diverse opgaven hierover voor, ook in de s.o. vormt het rekenen met verhoudingen de kern. Een selectie uit de gegeven opdrachten is de volgende opsomming.

Op een kaart staat de volgende schaalstok:



Welke schaal heeft deze kaart?

De visuele schaal, hier schaalstok genoemd, is basisschoolleerlingen niet onbekend. Voor het berekenen van afstanden op kaarten is deze schaalaanduiding aanmerkelijk inzichtelijker en dus gemakkelijker dan de traditioneel bekende schaalaanduiding op kaarten, zoals 1 : 100.000.
In het geval van bovenstaande opdracht wordt echter een ander element nagegaan: kunnen kinderen visuele schaalaanduidingen omzetten in een verhoudingsnotatie?
Dat hier een misleiding in zit die op zich niets met het schaalbegrip van doen heeft, is duidelijk. We kunnen dan ook antwoorden verwachten als

1 : 100 (1 cm staat voor 100 km).

1 : 10.000.000 (1 cm staat voor 10 miljoen cm).

Daarmee maken leerlingen een fout: 1 cm staat voor 25 km. De schaal is dus 1 : 2.500.000. Op de letter geredeneerd is de vraag niet relevant, omdat de schaal door de 'schaalstok' is gegeven.
Het antwoord staat er dus al. Volgende opdracht.

Er zijn twee kaarten van hetzelfde gebied.
Kaart I schaal 1 : 25.000
Kaart II schaal 1 : 100.000
Wat is het verschil tussen deze kaarten?
a Op kaart II is veel meer weggelaten dan op I.
b Op kaart I is veel meer weggelaten dan op II.
c Op kaart I is alles kleiner afgebeeld dan op II.
d Op kaart II is alles groter afgebeeld dan op I.

Een enorme klus, om deze vraag juist te beantwoorden.
Als men door heeft dat antwoord c eigenlijk hetzelfde beweert als antwoord d, kan men deze antwoorden uitsluiten. De grond waarop men dit doet heeft dan echter niets te maken met inzicht in de schaalproblematiek.
Resteert een keuze tussen a en b. Het idee dat men gegevens weglaat wordt hier gekoppeld aan het schaalbegrip. Dat dit onjuist is, zal ieder die kaarten in een basisschool heeft zien hangen, kunnen beamen. Er zijn heel grote kaarten met heel weinig informatie. Deze kaarten zijn om didactische redenen zo samengesteld, naar mag worden aangenomen.

Conclusie

Het is niet duidelijk of op grond van bovenstaande (en de niet beschreven) opgaven het inzicht in aardrijkskundige fenomenen kan worden getoetst. De indruk bestaat dat aan deze brugklasleerlingen zo ongeveer het moeilijkste wat bedacht kan worden, wordt gevraagd.
We moeten de opdrachten van het proefwerk en de overhoring in de didactische context beoordelen: het gaat om kinderen die net van de basisschool komen en die op de basisschool aardrijkskundeonderwijs hebben gehad dat niet voorbereid is op deze kwesties. Kwesties die thuis horen in het reken/wiskundeonderwijs. Vanuit wiskunde-didactisch oogpunt is het in dit artikel behandelde proefwerk zeer zwaar te noemen.
Welke volwassene zou de opgaven kunnen maken?
Er is gegronde kritiek op dit proefwerk mogelijk. Dat is dat er niet op een didactisch verantwoorde manier met bijvoorbeeld de moeilijke schaalproblematiek bijvoorbeeld wordt omgegaan. Het zijn maar jonge kinderen die de problematiek nog onder de knie moeten krijgen. Daarvoor is een didactische opbouw nodig. Het is de vraag of die er is.

In het aardrijkskundeonderwijs wordt gebruik gemaakt van wiskundige kennis. In vele scholen zal de aardrijkskundeleraar geen overleg plegen met de wiskundeleraar over stof gelegen in het grensgebied tussen beide vakken. Toch bestaat hiertoe alle aanleiding, wat met dit artikel beoogd werd aan te tonen. Dit artikel is bedoeld om de wiskundeleraar een mogelijkheid te geven een discussie tussen hem en zijn collega op gang te brengen.

Mathesis in Utopia

Kees van Baalen

Een soort Bali, maar dan met de afmetingen van een continent, moet u zich voorstellen. Een hoogontwikkelde oude kultuur, van een heel ander karakter dan de onze. In Utopia staan muziek, dans en beeldende kreativiteit in hoog aanzien, terwijl de produktie van welvaartsgoederen een lagere prioriteit heeft dan in onze maatschappij. Er is bijv. wel gemotoriseerd verkeer, maar slechts een fractie van wat wij aan drukte (en stank, lawaai en gevaar) kennen. Mechanische reproduktie van muziek en beelden is er van overheidswege verboden (televisie, video, compact-discs e.d. ontbreken dus) om de individuele kreativiteit van de burgers niet te bedreigen. Deze ontvangen daarentegen wel een grondige muzikale en beeldende training. Als bijdrage aan de gemeenschap is iedereen gewoon enkele uren per week in het openbaar te musiceren in café's, parken of overheidsgebouwen.
De steden zien er ook heel anders uit dan de onze. Waar in onze moderne buitenwijken de burgers er genoegen in scheppen hun woningen er zo uniform mogelijk te laten uitzien, zijn in Utopia alle huizen verschillend omdat de bewoners hun gevels versieren. Op sommige zijn mozaïeken ingelegd, op andere fresco's geschilderd of sculpturen aangebracht. In dit vreemde land zijn uiteraard ook voorzieningen als waterleiding, industrie en handel, maar deze hebben, hoewel algemeen gewaardeerd, een wat lagere status.
Het zal u dan ook niet verbazen dat in dit land wiskunde níet in het algemeen voortgezet onderwijs is opgenomen en wèl musiceren en schilderen. O, er is wel wiskunde-onderwijs, dat overigens als twee druppels water op het onze lijkt, maar dit wordt alleen gegeven aan jongelui, die hun maatschappelijke bijdrage in de technische sektor willen leveren. Dit wiskunde-onderwijs wordt gegeven in instituten, die enigszins geïsoleerd buiten het gewone onderwijs staan. Mathematoria geheten. (Dus zoals ongeveer conservatoria bij ons.)

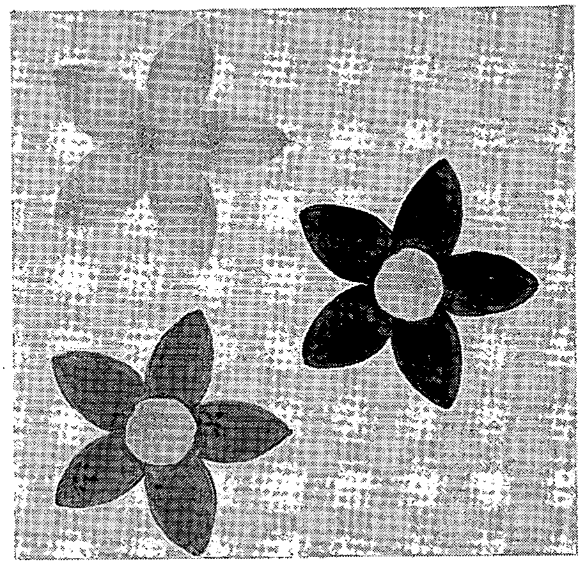
In de regering van dit Utopia was (uit emancipatorische overwegingen) een minister opgenomen, die niet zoals daar gebruikelijk was, uit artistieke kringen stamde. Zij kwam uit de sfeer van de wat in de schaduw staande handel, industrie en bankwezen. Deze minister, die als enige in het kabinet wel wiskunde-onderwijs had genoten, overwoog of het niet goed was om de gehele jeugd van Utopia met de voor ons vanzelfsprekende rijkdommen van de wiskunde te laten kennismaken. De minister stelde net zo als bij ons gebruikelijk is, een Commissie in, die langdurig vergaderde en (het is verbazingwekkend) een Rapport uitbracht. Dit Rapport behelsde het advies om docenten uit de genoemde mathematoria een conceptleerplan te laten opstellen.
De minister volgde het advies op en er ontstond, begrijpelijk, in de mathematoria grote beroering. Na zeer lange overlegprocedures (ja ook in dit Utopia) werd het volgende pre-advies uitgebracht: 'Excellentie, de commissie dankt u voor het in haar gestelde vertrouwen en deelt u mee dat zij in meerderheid (helaas niet unaniem) oordeelt dat het wenselijk is dat het vak wiskunde in het algemeen onderwijs wordt opgenomen.
De commissie wil er met klem voor waarschuwen dat dit onderwijs niet teveel moet gelijken op dat in de mathematoria (en dat wat in de West-Europese kultuur veelvuldig voorkomt), omdat de daar noodzakelijke uitgebreide vraagstukkentraining en voortdurende strenge toetsing bij algemene invoering het beeld van de wiskunde zeer zouden schaden. Wiskunde zou in de reuk komen te staan van moeilijkheid, saaiheid en onbegrijpelijkheid, wat precies het tegendeel is van hetgeen uwe Excellentie wil, namelijk 'leerlingen in kontakt brengen met de schoonheid van de wiskunde en inzicht geven in de fundamentele struktuur van het (ook hun eigen) menselijk denken'.
De commissie vindt daarom dat bij het eventueel in te voeren wiskundeprogramma de nadruk moet liggen op lichtheid, speelsheid en schone vormen, en dat het zonder enige moeite gevolgd moet kunnen worden door ook de minst begaafde leerlingen,

zo mogelijk samenwerkend in groepen met meer begaafde leerlingen.
De commissie gaat ervan uit dat alle leerlingen in het basisonderwijs enige rekenvaardigheid hebben verkregen.
De commissie stelt zich voor dat de kern van het wiskunde-programma bestaat uit een inleiding in de axiomatisch-deductieve opbouw van een kommunikatiesysteem, omdat dit naar mening van de commissie het wezen van de wiskunde uitmaakt.
Zo'n systeem heeft, zoals u ongetwijfeld bekend is, respectievelijk een alfabet van toegelaten basistekens, formatieregels, die aangeven hoe met die tekens welgevormde uitdrukkingen ontstaan en tenslotte deductie-regels, die vastleggen, hoe uit uitdrukkingen nieuwe uitdrukkingen geproduceerd kunnen worden.
Zo'n alfabet kan bijv. zijn: $\{p, ', \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, =, 0, 1, (,),\}$
Een formatieregel kan bijvoorbeeld zijn dat uitdrukkingen gevormd kunnen worden uit $\{p, p', p'', \ldots\}$ door deze tekens te plaatsen aan weerszijden van de konnektieven $\{\wedge, \vee, \rightarrow, =\}$ of aan de rechterzijde van $\neg$.
Een deductieregel zou kunnen zijn dat iedere uitdrukking vervangen mag worden door een andere als bij alle mogelijke verdelingen van de waarheidswaarden $\{0, 1\}$ onder de zinsvariabelen $\{p, p', p'', \ldots\}$ de zelfde waarheidstabel ontstaat.
Dit zijn voorbeelden van metaregels, die voor ieder kommunikatiesysteem gelden. Voor een speciaal gebied, meetkunde of mechanica bijvoorbeeld, worden aan de metaregels axioma's toegevoegd (zoals: tussen twee punten is één rechte lijn mogelijk) die de materiële inhoud van het vakgebied a priori vastleggen. Uit het samenstel van metataal en objekttaal kunnen dan de voor het vakgebied geldende theorema's (ware uitspraken) worden afgeleid.
Overbodig te zeggen dat dit programma in deze vorm niét aan de leerlingen moet worden aangeboden. Hoe dat wel kan, laat het volgende 'spel' zien.
Hierin zijn de essentiële kenmerken van het bovenstaande aanwezig: Het alfabet bevat de termen {hart, bloemblad, bloem, boeket, kleur}
Formatieregels zijn:

a Bloembladen rondom een hart gegroepeerd vormen een bloem
b Bloembladen en hart hebben een kleur
c Een boeket bestaat uit bloemen

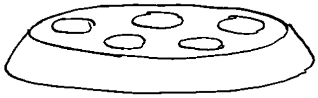
Een deductieregel zou zijn:
Met bloemen kan een boeket worden gevormd.
Gegeven deze metataal zouden er axioma's kunnen worden toegevoegd:

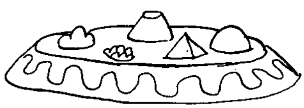
1 Een kleur is geel, rood of blauw
2 Een bloem heeft vijf bloembladen
3 De bloembladen van een bloem hebben alle dezelfde kleur
4 Het hart is geel
5 Een boeket heeft 3 bloemen.



Dit systeem zou Monochroom 5-3 kunnen heten. Theorema's ervan zouden zijn een bloem met gele, rode of blauwe bloembladen en boeketten van drie van zulke bloemen. Dus rood-rood-rood, rood-rood-blauw, rood-rood-geel, enz., 27 permutaties in totaal.
Het bovenstaande zou uiteraard nog niet de leerlingentekst zijn, maar een lerarenhandleiding. Het leerlingenmateriaal zou kunnen bestaan uit kleurpotloden, lijm en papier.
Om te tonen hoe verschillende axiomatische stelsels naast elkaar kunnen bestaan (zoals het Euclidische en niet-Euclidische) zou vervolgens een ander spel gespeeld kunnen worden. Bijv. Polychroom 3-4. Hierbij kan iedere gewenste graad van complexiteit worden bereikt. Maar gewenst wil in dit geval wel zeggen dat de leerlingen spontaan en prettig bezig blijven en er school, huis en elkaar mee kunnen versieren.

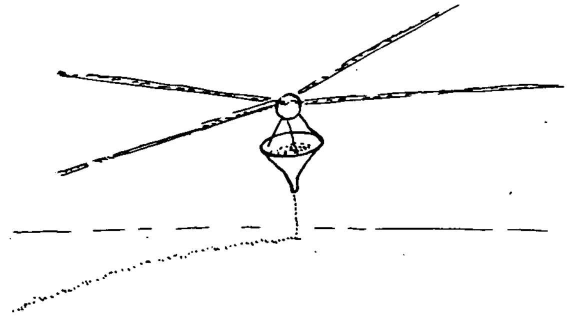
Om leerlingen te doordringen van de algemeenheid van het begrip deduktief systeem zouden nog andere spelen gespeeld kunnen worden.
Bijvoorbeeld één met zandvormpjes, waarmee taarten gebakken kunnen worden, waarbij met een grotere vorm eerst een 'taartbodem' gemaakt wordt, waarop open ("argument-")plaatsen aanwezig zijn, waarin kleinere ("variabele") zandtaartjes geplaatst kunnen worden.



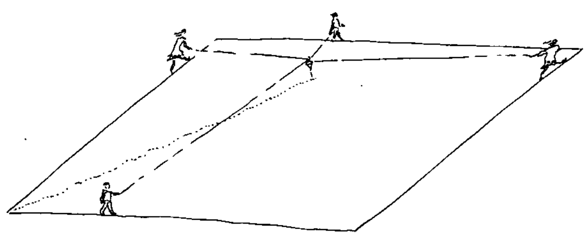


Misschien zou ook de paradox van de Sorites genoemd kunnen worden, ("Als een zandvormpje nu eens slechts één zandkorrel zou kunnen bevatten?") die uit de Griekse wijsgerige school te Megara is overleverd: laat z een uit n korrels bestaande zandhoop zijn. Neem er één korrel van weg. Er ontstaat dan een zandhoop z' met n-l korrels. Neem nog een korrel weg... enz. Dan produceert deze reeks tenslotte de zin z······' is een zandhoop van één korrel. Welke (volgens Eubulides een kontradiktie is, als een zandhoop per definitie meerdere zandkorrels bevat.
Op deze wijze zou een groot reservoir van leer- en speelvormen kunnen worden gemaakt.
De commissie wil nog een voorbeeld geven van een heel ander gebied dat in dansvorm gespeeld kan worden. Namelijk transformatiemeetkunde. Uit te voeren in het in alle scholen aanwezige goed geoutilleerde balletlokaal. Leerlingen verspreiden zich 'als punten in een tweedimensionale ruimte'. De docent trekt met krijt of een lichtbundel een lijn over de vloer, die hij 'spiegelas' noemt, waarop de leerlingen zich naar hun spiegelbeeld spoeden. Rotaties en translaties kunnen zo ook gespeeld worden. Alleen puntspiegeling geeft misschien een wat chaotische toestand.
In groepjes kunnen figuren (ruiten, cirkels) worden gevormd, waarvan bijvoorbeeld de hoekpunten hun coördinaten uitroepen voor en na een bepaald transformatievoorschrift.

Van een ander vakonderdeel, één waarvan men dit het minst zou verwachten, wil de commissie nog een uitwerking in speelse vorm geven: analyse. Vier



kinderen staan twee aan twee tegenover elkaar en houden een touw vast. De touwen kruisen elkaar in een ring, waaraan een soort halve zandloper hangt. Hieruit loopt een dun straaltje zand. Het ene paar loopt in de 'x-richting' en het andere in de 'y-richting'. Lopen de beide paren even hard dan wordt op de grond de funktie $y = x$ als zandspoor afdgebeeld. Loopt het ene paar tweemaal zo hard dan ontstaan $y = 2x$ of $y = 1/2\,x$. Loopt een paar steeds langzamer en stopt tenslotte, dan ontstaat het beeld van een 'limiet'.



Als vervolg op dit spel zou een kleiner formaat beeldschrijver kunnen worden aangeboden. Denk hierbij aan een computer, waar op het beeldscherm een lichtpunt een eenparige horizontale beweging uitvoert, waaraan vervolgens verticale y-waarden gegeven kunnen worden ($y = 2x$, $y = \sin x$, e.d.) die als 'grafiek' op het scherm verschijnt.
Het zou pedagogisch onverantwoord zijn om kinderen direkt zo'n toverdoos te geven, voordat ze zoiets gespeeld hebben in een situatie, die ze zelf volledig in handen hebben, zoals bij het zandspoor.
Tot zover enkele voorbeelden. De commissie meent dat kinderen graag met dergelijke mathematische

vormen spelen, maar zij legt er nogmaals de nadruk op dat deze het best in groepswerk tot hun recht komen. Bovendien wordt dan het hoog gewaardeerde samenwerken gestimuleerd, en naijver vermeden.
Met deze summiere notitie meent de commissie aan haar opdracht te hebben voldaan en hoopt bij goedkeuring van de bewindsvrouwe een opdracht tot het ontwikkelen van een volledig leerplan te ontvangen'.
Dit merkwaardige ambtelijke stuk dat mij op mijn reis door Utopia toevallig in handen viel, zette mij weer aan het peinzen over de problemen van motivatie, selektie en al of niet heterogene groepen in ons eigen wiskunde-onderwijs.

Boekbespreking

W. P. van den Brink en P. Koele – *Statistiek, Deel 2: Theorie,* Boom Meppel, ISBN 90 6009 668 1, *f* 39,50.

Dit boek maakt deel uit van een serie van 3 boeken over statistiek. Het eerste deel daarvan behandelt de beschrijvende statistiek, het tweede de theorie van het schatten en toetsen en de daarbij gebruikte kansverdelingen, terwijl deel 3 zich bezig houdt met toepassingen van de schattings- en toetsingstheorie. In deel 2 staat niet vermeld wat de doelgroep is die de schrijvers voor ogen hadden bij het schrijven. Het lijkt me dat deze boeken vooral bedoeld zijn voor studenten in het h.b.o. en w.o. in vakken waarbij statistiek een noodzakelijk instrument is, dus bijvoorbeeld aankomende artsen, psychologen en sociologen.
Dit deel bevat een zestal hoofdstukken met als onderwerpen kansrekening, kansvariabelen (= stochasten), kansverdelingen, steekproefverdelingen, schattingstheorie en toetsen.
De kansrekening wordt vanaf het begin opgebouwd op een vrij intuïtieve manier, zoals dat ook in het voortgezet onderwijs gebeurt. Er worden de gebruikelijke discrete en continue kansverdelingen behandeld: van de alternatieve verdeling tot en met de Student t-verdeling; de chi-kwadraat verdeling en de F-verdeling. Hierbij ligt de nadruk vooral op het bereiken van inzicht in de materie en worden mathematische afleidingen zoveel mogelijk vermeden of behandeld in noten. Moeilijker afleidingen worden in het geheel weggelaten. De tekst bevat aan het eind van elk hoofdstuk een aardige verzameling karakteristieke vraagstukken, waarvan alle uitwerkingen in een bijlage te vinden zijn. Er is ook een bijlage over elementaire combinatoriek, terwijl na elk hoofdstuk (ook recente) literatuurverwijzingen zijn opgenomen. Uiteraard ontbreekt een register evenmin.
Het boek slaagt over het algemeen uitstekend in zijn opzet om vooral dat inzicht bij te brengen, dat nodig is om verstandig gebruik te kunnen maken van statistische methoden. De uitleg is meestal zeer helder en to the point. Voor veel studenten zal het wat dit betreft een plezierig leerboek zijn. Toch wil ik ook enige kritische opmerkingen maken.
Zo wordt de Poissonverdeling gekarakteriseerd als een verdeling 'die zeldzame verschijnselen beschrijft' (blz. 29 en 76). Dit komt wel overeen met de historische gang van zaken, maar tegenwoordig zal men de Poissonverdeling toch liever in verband brengen met discrete gebeurtenissen in een continuüm (bijvoorbeeld het aantal bacteriën in 1 cm^3).
Op blz. 42 wordt gesteld dat verdelingen gewoonlijk wel gekarakteriseerd kunnen worden door het gemiddelde en de spreiding. Hopelijk zal dat niet worden opgevat in de zin dat de verdelingen *vastgelegd* worden door gemiddelde en spreiding!
Bij de behandeling van de centrale limietstelling wordt helaas opgemerkt dat er geen voorwaarden gesteld behoeven te worden voor de geldigheid van de stelling (blz. 93). Dit is misschien wel in lijn met de niet vergaande wiskundige behandeling van de stof, maar ik vind dit toch ietwat al te ver gaan.
Een aantal onderwerpen wordt in het boek slechts zeer terloops aangeroerd. Zo wordt weliswaar het begrip bruikbaarheid van een schatter ingevoerd, maar de lezer krijgt geen voorbeeld van een schatter die deze eigenschap niet heeft. Bij het behandelen van de maximum likelihood methode voor het vinden van schatters wordt slechts één enkel voorbeeld gegeven, waaruit de argeloze student zou kunnen concluderen dat bij gebruik van deze methode de functie $L(\Theta)$ altijd gedifferentieerd moet worden.
Ook het Neyman-Pearson lemma is heel kort behandeld, waarbij het me lijkt dat hierdoor het begrip niet wordt gediend. Ook verder in de tekst worden soms onderwerpen aangeroerd, die meer vragen opwerpen dat ze beantwoorden (voorbeeld op blz. 99: 'transformaties zoals $\sqrt{X}$ of log X die...').
Op de (typografische) uitvoering van het boek valt niets aan te merken. Het aantal drukfouten is heel beperkt – blz. 37: 'expected value of expectation' behoort te zijn 'expected value' of 'expectation'; blz. 72: multi*o*nomiale; blz. 167: n = 100 behoort te zijn n = 1000 en blz. 173 waar v staat in plaats van *v*.
Voor een bepaalde groep lezers is dit een goed boek. Het blijft een buitengewoon moeilijke opgave om aan personen zonder grondige wiskundige voorkennis statistiek te onderwijzen. Het beoefenen van statistiek zonder een behoorlijke geestelijke bagage heeft helaas wel iets weg van het onbevoegd uitoefenen van de geneeskunde.

dr. E. de Vries.

Structuur aanbrengen door leerlingen

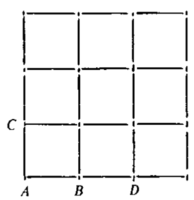
Wijze van structureren en gevoelens bij de aanpak van een probleem

Harrie Broekman

1 Inleiding

Aan het eind van mijn artikel 'Wie ziet wat' in Euclides 61 nr. 5, januari 1986 gaf ik de bijgaande opgave met de opmerking dat ook wij leraren vaak niet hetzelfde zien.

Given the 3 × 3 array of nine congruent unit squares, observe the following:



1. If *BD* is removed, then eight congruent squares remain. Thus, removal of one unit segment leaves eight congruent squares and no other shapes within the 3 × 3 array.
2. If *AB* and *AC* are removed, then eight congruent squares remain. Thus, removal of two unit segments leaves eight congruent squares and no other shapes in the 3 × 3 array.
One is the least number and two is the greatest number of unit segments that can be removed so that eight congruent squares remain. Complete the Min and Max tables below and, on a separate sheet, make a sketch to illustrate each one of your choices.

De opgave heb ik voorgelegd aan meerdere personen. Vervolgens zijn hun reacties geïnventariseerd. Het viel mij op dat er nogal wat gevoelsmatige aspecten een rol speelden, naast de verschillen in voorkeur voor het kijken naar getallen resp. plaatjes. Daarom zal ik niet alleen ingaan op 'verschillende aanpakken', maar ook de naar voren gebrachte gevoelens bespreken.

2 Verschillende aanpakken van het probleem

De personen die ik het probleem voorlegde reageerden veelal met een afwijzing (daarover later) of een direct aan het werk gaan. Tekenen, lijnstukjes wegstrepen, de kolom(men) invullen. Het gevoel dat tempo belangrijk is speelt – volgens hun zeggen – daarbij een grote rol. Die gedachte dat het *tempo* belangrijk is én het *antwoord* werd ook geuit door degenen die begonnen met het afzoeken van hun geheugen naar relevante feiten en hulpmiddelen om het probleem aan te pakken.

MIN TABLE		MAX TABLE	
Least Number of Unit Segments to Move	Number of Congruent Squares Remaining in the Array	Maximum Number of Unit Segments to Move	Number of Congruent Squares Remaining in the Array
1	8	2	8
	7		7
	6		6
	5		5
	4		4
	3		3
	2		2
	1		1

'Gewoon' wat doen

In het voorgaande komt al naar voren dat vrijwel niemand bewust een plan maakte voor aanpak, maar gewoon aan de gang ging. Hierbij viel op dat slechts een enkeling zeer bewust de gegevens in zich opnam en zich afvroeg wat nu wel mocht en wat niet. Pas op een moment van aarzeling werd gekozen voor een systematische benadering via kijken naar de figuur (A) resp. de getallen (B).

A Bij 1, 2, 3, 4 hokjes weg kan ik het het zuinigst door steeds het middelste pinnetje van een zijde weg te halen. Als ik kijk naar wat ik dan overhoud, zie ik resp. 5, 4, 3, 2 en 1 vierkantjes met geen enkele zijde gemeenschappelijk. Bij zo veel mogelijk weglaten bekijk ik het van bovenaf. Dus kijk ik naar de vierkantjes zodat het overblijvende er zo compact mogelijk uitziet.

B Eerst ben ik gewoon begonnen met tekenen en heb ik de tabel ingevuld (regelmaat). Met minder vierkantjes werd duidelijk dat ik fouten had gemaakt. Toen heb ik gecontroleerd met tellen. Van bovenaf en ook van onderaf, en zo een soort dubbele regelmaat.

Dit 'van twee kanten uitwerken' kwam vaker voor, zoals bij een student wiskunde die zijn werkwijze als volgt beschreef:

Aanpak:

1 Min. weg: dan minimaal aantal zijden gemeenschappelijk in overblijvende.
Max. weg: dan zo veel mogelijk zijden gemeenschappelijk in overblijvende.

2 Gecontroleerd door af en toe tellen.

3 Van 1 t/m 4 van boven naar onder, toen vanaf 1 vierhoek-over teruggewerkt.

Blikwisseling

Opvallend was voor mij dat vrijwel al degenen die de blikwisseling toepasten (ook van onder in de tabel beginnen) een meetkundige- plaatjesaanpak volgden. Een aanpak die een overzien van het probleem inhoudt. Dit gold zeker voor degenen die geen gummetje gebruikten, maar telkens de volgende figuur tekenden. Toen ik een van de wiskundestudenten vroeg waarom ze dat deed, antwoordde zij:

Ik wil niet alleen zien wat er komt, maar ook wat er was. Liefst zo, dat ik ook kan zien wat er veranderd is. Hier dus, wat er aan de figuur veranderd is.

Een medestudent, die naar regelmaat in de rijtjes getallen had gezocht, merkte toen op dat hij daarom juist naar de tabel gekeken had en deze veranderd had door er drie kolommen van te maken (dicht bij elkaar). Dan 'zag' hij een eventueel verband tussen de getallen beter.

Hoe moeilijk het soms is je in de gedachtengang van een ander te verplaatsen, bleek uit de opmerking van een derde student:

'Ik zie niet zo gauw wat jullie bedoelen, maar volgens mij is dit wel een heel erg eenvoudig probleem: Minimaal weghalen is maximaal laten staan en maximaal weghalen is minimaal laten staan. Dus probeer de vierkantjes met zo weinig mogelijk en met zo veel mogelijk lucifers te maken, Dus onderaan beginnen'.

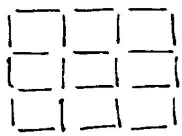
Een prachtige oplossing van het probleem, dat is zeker. De betreffende student had echter geen idee hoe hij daar op gekomen was (geen bewust plan gemaakt voor een aanpek, niet bewust gezocht in zijn geheugen, geen contrôle ingebouwd). Wat ik voor zijn toekomstig leren echter zeker zo jammer vind is dat hij niet in staat bleek mee te doen met het vergelijken van oplossingsmethoden die ingebracht werden. Dit kwam niet alleen doordat hij zo'n flits idee had gehad, maar ook doordat hij in feite niet gestart was met het bewust verkennen van het probleem (Polya noemt dat 'het begrijpen van het probleem', zoekregel 1).

Structuur in de aanpak

Dat vergelijken van oplossingsmethoden bleek wel goed mogelijk voor degenen die eerst met het gegeven en gevraagde stoeiden. Een van hen – Elke Klieverik – stelde dat zij het probleem wel op zou kunnen lossen door proberen, door te kijken naar eventuele structuur in getallenrijtjes of naar structuur in de plaatjes, maar dat ze daar op dat moment niet zo'n zin in had. Later gaf ze mij een papier met daarop haar aanpak van het probleem met de woorden: *'hier heb ik nog wat, kun je niet zeggen dat we niet netjes algemeen formuleren'.*

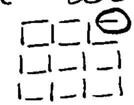
Die opmerking was vermoedelijk bedoeld als een grapje, maar er kan meer achter zitten. Persoonlijk zou ik graag willen dat het opgevat wordt als een eerste stap van hetgeen door Polya aangeduid wordt met *'Kun je het resultaat of de methode voor een ander probleem gebruiken?'* Van Hiele zegt hier-

Gegeven 24 lucifers die als volgt zijn neergelegd:

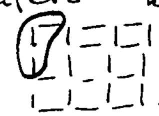


ze vormen dus 9 kleine vierkantjes.

Gevraagd: hoeveel lucifers moet je minimaal wegnemen en hoeveel mag je maximaal weghalen om n $(0 \leq n \leq 9)$ kleine vierkantjes over te houden.
(Er mogen geen loze lucifers blijven liggen, dus



en

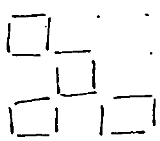


mogen niet)

(1) Voor de oplossing van het aantal lucifers dat je <u>minimaal</u> moet weg nemen om n kleine vierkantjes over te houden:

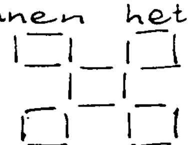
Als $n \leq 5$, leg dan n "losse" vierkantjes neer binnen het rooster van 3 bij 3. Met "losse" bedoel ik vierkantjes die geen zijden gemeen hebben. Je hebt dan een maximum aantal nodig om de n te maken.
Deze "losse" vierkantjes vormen de figuur die je over moet houden, dus je moet minimaal $24 - n \cdot 4$ lucifers wegnemen uit de beginfiguur.

bijvoorbeeld:
$n=4$

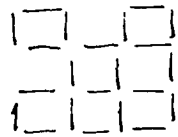


dit is een mogelijke figuur die je over kunt houden door 20 min mogelijk lucifers weg te halen.

Als $n > 5$, leg dan 5 "losse" vierkantjes neer binnen het 3 bij 3 rooster, dus:



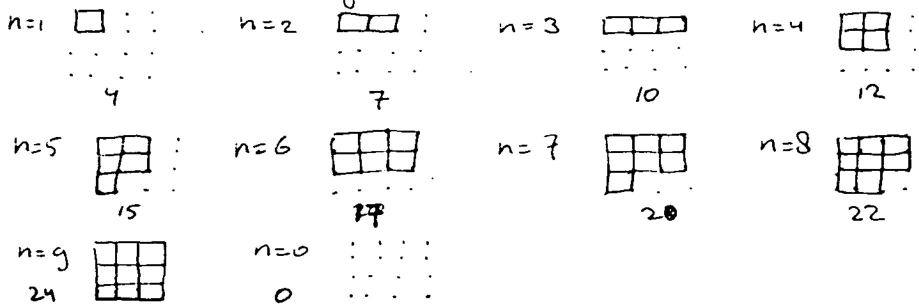
en leg voor ieder vierkantje dat je meer moet hebben een lucifer erbij
(binnen het 3 bij 3 rooster)
dus bijv. $n = 7$



dan heb je de figuur die je over moet houden.
Dus moet je minimaal
$24 - 5 \cdot 4 - (n-5) \cdot 1$ lucifers wegnemen om n $(n > 5)$ vierkantjes over te houden.

(2) Voor de oplossing van het aantal lucifers dat je maximaal kunt wegnemen om n vierkantjes over te halen.

Leg n vierkantjes zodat de vierkantjes zo veel mogelijk zijden gemeen hebben. Tel hoeveel lucifers hiervoor nodig zijn. 24 min dit aantal is dan het aantal lucifers dat je maximaal kunt wegnemen om n vierkantjes over te houden.



over in een artikel in Euclides *'Leerlingen getuigen van een typisch wiskundige instelling, als zij een gevonden oplossing willen veralgemenen'.*
Het goede in de aanpak van Elke is dat zij – op haar manier – begonnen is met het voor zichzelf vastleggen van de gegevens. Vervolgens heeft zij de vraagstelling bekeken en deze omgevormd (maximaal overhouden i.p.v. minimaal weghalen).

Uit het voorgaande is het een en ander af te leiden over het structureren van de aanpak van het beschreven probleem, dat van belang is voor het oplossen van wiskundige problemen in het algemeen.
In de Docentengids (rubriek 8) wordt dit als volgt beschreven:

Het oplossen van problemen heeft in het algemeen twee aspecten: het zoeken en het vinden. Meestal gaat zoeken aan vinden vooraf, maar men vindt ook wel eens zonder te zoeken en omgekeerd zoekt men vaak zonder te vinden.
Zoekregels heten wel *heuristische regels* en vindregels *algoritmische regels.* Er is tussen beide soorten regels een belangrijk verschil: terwijl vindregels een specifiek vakinhoudelijk karakter hebben, hebben zoekregels eerder een denktechnisch karakter. Dit heeft tot gevolg dat vindregels expliciet onderwezen worden, maar zoekregels alleen maar impliciet. Hetzelfde geldt voor *algoritmen* (= systeem van vindregels) en *heuristieken* (= systeem van zoekregels): algoritmen worden wél expliciet onderwezen, heuristieken niet.
Een didactische werkvorm, die gericht is op het vergroten van het probleemoplossend vermogen van de leerlingen, is het expliciet maken van de zoekregels tijdens de les, m.a.w.: het onderwijzen van heuristieken.

En verder:
Een *heuristiek* voor het oplossen van wiskundige problemen kan er aldus uitzien (naar Polya).
- *Zoekregel 1*: Stel jezelf de vragen: Zijn de gegevens voldoende om het gevraagde te bepalen? Of zijn er niet voldoende gegevens? Of overbodige? Of voeren ze tot een tegenspraak?
- *Zoekregel 2*: Vraag je bij elk nieuw op te lossen probleem af, of je een soortgelijk probleem eerder tegengekomen bent. Indien dit het geval is, ga dan na hoe je dit soortgelijke probleem vroeger hebt opgelost.
- *Zoekregel 3*: Indien je een nieuw probleem niet kunt oplossen, probeer dan eerst een probleem dat iets eenvoudiger is en er toch op lijkt, op te lossen. Probeer zo'n toegankelijker aanverwant probleem te bedenken.
- *Zoekregel 4*: Probeer van alle gegevens gebruik te maken.
- *Zoekregel 5*: Maak een plan om tot de oplossing te komen. Voer het plan stap voor stap uit. Controleer elke stap.
- *Zoekregel 6*: Zodra je het probleem opgelost hebt, moet je jezelf de volgende vragen stellen: Had ik dit resultaat ook op een andere manier kunnen bereiken? Kan ik achteraf het resultaat controleren? Kan ik in één oogopslag zien of het resultaat juist is.

Het staat er zo mooi, maar hoe komt het dan dat zoveel verstandige mensen niet systematisch aan het werk gaan bij de voorgelegde opgave? Dat zij niet rustig het probleem tot zich nemen, een plan maken voor de aanpak, etc.? Mij richtend op de klasse-situatie en meer speciaal tot de wiskundeles zou ik die vraag willen ombouwen tot:
hoe komt het dat veel van onze leerlingen zo weinig structuur aanbrengen in de aanpak van aan hen voorgelegde problemen?
Er is geen eenduidig antwoord te geven op deze vraag. Zeker niet in de zin van 'je hebt nu eenmaal weinig structureerders'. De neiging tot structureren – in ieder geval het vermogen tot structureren – is zeker voor 12- tot 18-jarigen te vergroten.

Gaan we het structureren misschien tegen?
Er zijn inderdaad aanwijzingen dat wij als leraren – door onze manier van werken in de klas – dit bewuste structureren van probleemaanpak tegengaan. In ieder geval niet bevorderen, laat staan verbeteren.

Het gaat daarbij ondermeer om het volgende:
- Bij het *nakijken* van opgaven wordt vaak bewust, maar ook onbewust, de nadruk gelegd op het antwoord. Ook het antwoordenboekje geeft alleen antwoorden. Pas als er iets niet klopt met het antwoord ('*ik heb wat anders*') wordt er aandacht aan de aanpak besteed.
- Bij het *bespreken* van opgaven wordt meestal weinig tijd uitgetrokken voor het terugblikken. Hoe de leerlingen tot een oplossing gekomen zijn komt dan niet in bespreking.
- Bij het *bespreken* krijgt impliciet of expliciet de aanpak van de docent de voorkeur. De mogelijke alternatieve aanpakken van leerlingen komen onvoldoende aan bod.
  Dit gebeurt soms omdat de docent de alternatieven niet voorbereid heeft en deze niet snel overziet. Vaak ook omdat hij ze gewoon minder goed vindt. Het geuite argument is dan veelal dat het te veel wordt voor de andere leerlingen.
- *Van het begin af aan* wordt er door leerlingen, ouders (en leraren?) vanuitgegaan dat wiskunde alleen voor de knappe koppen is. Dus waarom zou je structureren? Je ziet het, of je ziet het niet. Je hebt die knobbel, of juist niet. Je krijgt vaak beurten, of niet.
  De fout van de een is een vergissing, die van de ander weer een fout...
- *Van het begin af aan* heeft een aantal leerlingen het zo gemakkelijk dat ze schijnbaar niet structureren, maar gewoon doen. Dat schijnbare geldt niet alleen voor de buitenwereld, maar ook voor henzelf. Ze lijken het systematisch werken niet nodig te hebben.
- Het idee leeft bij veel leerlingen (en leraren) dat het maken van opgaven, het oplossen van problemen, *snel* moet. Alsof het om een snelheidssport gaat. Systematisch werken lijkt meer tijd te kosten. En dat is in het begin ook vaak zo.

Een gevolg van dit accent op tempo is de sterke antwoordgerichtheid, die in het begin van deze paragraaf reeds genoemd werd.

Als het oplossen van een probleem niet snel gaat komt – naast het idee ‘het lukt niet’ – ook een negatief gevoel boven. Een gevoel dat kan uitgroeien tot een weerstand tegen het soort problemen dat op school wordt voorgelegd. Deze negatieve gevoelens, gevoegd bij de eenzijdige vooronderstellingen over wiskunde en de ervaringen met wiskunde, bevorderen het systematisch, gestructureerd te werk gaan bepaald niet.

De gevoelsmatige kant

Opvallend is dat bij het zien van de opgave velen (en niet alleen mensen met weinig wiskunde opleiding) direct reageerden met ‘*Oh, dat soort opgaven kan ik niet*’. Dit ging zelfs zover dat een aantal van hen het zoeken van een oplossing via gewoon proberen niet aanpakten.

Deze reactie van ‘*dat kan ik niet*’ werd door sommigen verduidelijkt door ‘*daar heb ik altijd al moeite mee gehad*’ en door anderen met ‘*dat heb ik nooit gehad*’.

Negatieve ervaringen in het verleden hebben een angst veroorzaakt of versterkt voor nieuwe negatieve ervaringen. Het niet aandurven van een nieuwe situatie kan ook een gevolg zijn van het ontbreken van positieve ervaringen met het aanpakken van nieuwe problemen.

Er waren ook mensen die dachten dat achter de opgave wel een trucje zou zitten. En die trucjes zijn eigenlijk *alleen maar toegankelijk voor wiskundigen.* Dit idee van ‘trucj[illegible] vormt een blokkade voor het aanpakken van he[illegible]schreven probleem. Vanwege het verkeerde beeld van ‘probleemoplossen’ dat er achter zit, maar óók door het gevoel van hulpeloosheid dat het bij velen oproept.

De genoemde gevoelens die samenhangen met ‘dat is me nog nooit gelukt’, ‘dat heb ik nog nooit gehad’ en ‘dat is voor mensen met een knobbel’ maken dat veel mensen niet eens aan de voorgelegde opgave beginnen, of dat ze snel afhaken. Dat is op zich niet zo erg, zo belangrijk is die opgave nu ook weer niet. Veel erger is het dat die gevoelens ook in de wiskundeles en bij het maken van huiswerk een grote rol spelen. Daarbij komt nog de druk van het in de vorige paragraaf genoemde idee dat het tempo belangrijk is.

Als leraar kun je aan deze gevoelens iets doen door geen truc-opgaven te geven, te zorgen dat de leerlingen positieve ervaringen kunnen krijgen en samen rustig aan problemen te werken. Maar ook door te proberen een sfeer te creëren waarbij het mogelijk is om fouten te maken. *Anders zou je alles toch al kennen/kunnen en valt er niets meer te leren?*

Uit allerlei onderzoek komt naar voren dat het essentieel is voor leren dat je niet alleen weet dat je iets fout deed, en hoe het wel had gemoeten, maar vooral ook dat je weet *wat* je fout deed. Als het mogelijk is, liefst ook nog hoe het kwam dat je die fout maakte en hoe je dat in de toekomst kunt voorkomen.

Ik zou daar voor de lessituatie aan toe willen voegen:

én dat er ruimte is om gevoelens die daarbij een rol spelen bespreekbaar te maken.

In het voorgaande is nog niets gezegd over de gevoelens van onzekerheid over een gekozen aanpak. Het gaat daarbij niet om de gevoelens die maken dat er niet eens begonnen wordt, maar gevoelens die opkomen tijdens het werken aan een probleem.

Zoals ik reeds aangaf pakten velen het voorgelegde probleem aan door direct iets te gaan doen. Vrijwel nooit door lucifers neer te leggen, maar wel door met potlood te tekenen en eventueel met een gummetje te gummen (een enkeling maakte twee tekeningen, een voor de minimum-kolom en een voor de maximum-kolom). Maar dan kwam het:

- *dat is vast niet de bedoeling, je zult wel een formule of zo nodig hebben*
- *ik weet niet of ik het zo goed doe, het duurt wel lang zo*
- *ik zou natuurlijk naar die getallen kunnen kijken (of er iets aan te zien is), maar dan moet ik eerst weten of ze goed zijn.*

Voor wiskundig geschoolden bleek hier iets geks aan de hand: ze vonden dat ze naar een soort formule moesten zoeken en dat maakte velen onzeker. Anderzijds hadden zij een soort zekerheid dat ze er wel uit zouden komen als ze systematisch alle mogelijkheden zouden nagaan. Ook de vraag of je

wel mocht 'redeneren aan de hand van een figuur' bleek bij vooral algebraïsch geschoolden een rol te spelen.
Het zal duidelijk zijn dat hierbij het genoten onderwijs een grote invloed heeft.

Tot slot

Uit het voorgaande zijn aanbevelingen te halen om het structuuraanbrengen bij het aanpakken van problemen (opgaven) te verbeteren:
- Probeer de leerlingen rustig te laten werken (voorkom tempodruk).
- Laat een foutieve aanpak niet direct vervangen door een goede aanpak. Besteed ook tijd en energie aan het bespreken van de fout (wat ging er fout, hoe kwam dat, hoe kan ik dat voortaan proberen te voorkomen).
- Maak de zoekregels die gehanteerd worden expliciet.
- Zorg dat veelvuldig aandacht besteed wordt aan 'het probleem begrijpen', 'een plan maken' en 'terugblik'. Dus niet alleen aan 'doen'.
- Maak duidelijk dat het eerst maar wat gaan 'stoeien met het probleem' beslist niet vies is. Het *kan* een goede eerste stap zijn om gevoel te krijgen voor het probleem. Anders gezegd: de eerste stap van een bewuste aanpak.
- Geef de ruimte die nodig is om gevoelens, die een rol spelen bij het al dan niet aanpakken van problemen, bespreekbaar te maken.

Aanbevolen literatuur

Harrie Broekman: *Leerstijlaspecten. Wie ziet wat?* Euclides 61, 5, jan. 1986.
Laurie Buxton: *Do you panic about maths?* Heinemann Educational Books, 1982.
Docentengids voor het voortgezet onderwijs, Rubriek 8: *Probleemoplossen.* Uitgave: Libresso Deventer.
Pierre van Hiele: *Op weg naar oplosmethoden met ruime toepasbaarheid.* Euclides 60, 10, juni 1985.
Bram Lagerwerf: *Uitdagen.* Euclides 61, 6, febr. 1986, en *Nivo's van zekerheid.* Nieuwe Wiskrant dec. 1983.
Polya, G., *How to solve it.* Princeton University Press 1971.
Anne van Streun: *Het onderzoeksproject 'Heuristisch wiskunde onderwijs'.* Euclides 60, 7, maart 1985.

Boekbespreking

R.S. Doran, V.A. Belfi, *Characterizations of C*-algebras. The Gelfand-Naimark theorems*, Marcel Dekker inc., 1986, 83,50 dollar.

Een C^*-algebra is een Banachalgebra (d.w.z. een volledige genormeerde algebra) met een involutie * die voldoet aan $\| x^*x \| = \| x^* \| \; \| x \|$. Een voorbeeld van zo'n C^*-algebra is de collectie van alle begrensde lineaire operatoren op een Hilbertruimte, waar de involutie de gewone geadjungeerde is. Ook elke gesloten $*$-deelalgebra (d.w.z. elke gesloten deelalgebra die met x ook x^* bevat) van deze collectie is een C^*-algebra. Een heel ander voorbeeld verkrijgen we als volgt. Zij X een locaalcompacte Hausdorffruimte, en zij $C_0(X)$ de verzameling van alle continue complexwaardige functies f zó dat voor alle $\varepsilon > 0$ er een compacte $K \subset K$ is met $|f(x)| < \varepsilon$ voor $x \in X / K$. Dan is $C_0(X)$ een C^*-algebra indien we $C_0(X)$ voorzien van de supremumnorm, en met als involutie het nemen van de complex toegevoegde.
Het verrassende is dat met deze voorbeelden in wezen alle C^*-algebra's beschreven zijn. De commutatieve C^*-algebra's zijn isometrisch $*$-isomorf met $C_0(X)$ voor één of andere locaalcompacte Hausdorffruimte X, de niet commutatieve C^*-algebra's zijn isometrisch $*$-isomorf met een gesloten $*$-deelalgebra van de collectie begrensde lineaire operatoren op één of andere Hilbertruimte. Dit is de inhoud van de stellingen van Gelfand-Naimark.
Het boek dat we hier bespreken geeft in het eerste hoofdstuk een korte inleiding en een historisch overzicht betreffende deze stellingen. Vervolgens worden ze bewezen in de hoofdstukken 2 en 3. In de daarop volgende hoofdstukken wordt nagegaan wat er van de axioma's van C^*-algebra's echt nodig is, en hoe de Gelfand-Naimark stellingen gegeneraliseerd kunnen worden naar andere typen Banachalgebra's. Vervolgens is er een hoofdstuk dat uitvoerig ingaat op toepassingen van theoretische aard. Hierin wordt onder andere de spectraalstelling voor normale operatoren bewezen. Het boek wordt gecompleteerd door een hoofdstuk met noten en opmerkingen, een appendix over functionaalanalyse, een appendix over Banachalgebra's en een uitgebreide bibliografie. Er is een behoorlijk aantal opgaven, waarvoor hints en verwijzingen achter in het boek zijn opgenomen.
Het boek lijkt me voor experts in dit gebied heel aardig. Verder is het geschikt voor studenten in de laatste fase van hun studie die iets meer over Banachalgebra's en C^*-algebra's willen weten. Met enig doorzettingsvermogen is het boek wel geschikt voor zelfstudie. Helaas zullen er in de tweefasenstructuur weinig studenten zijn die de benodigde voorkennis voor het lezen van dit boek in de eerste fase van hun studie opdoen, en nog minder die zo diep in de buidel zullen willen tasten voor een overigens goed boek.

A.C.M. Ran

Examenbesprekingen

Examenbesprekingen lbo, mavo, havo, vwo 1987

Voor alle examenbesprekingen geldt dat de door de CEVO vastgestelde normen *niet* gewijzigd mogen worden. Binnen de geldende normen kan men verfijningen afspreken.

Nu leerlingen van alle scholen voor vwo examen wiskunde-A doen, is het aantal bijeenkomsten uitgebreid tot tien, gespreid over het gehele land. Alle docenten wiskunde zijn welkom. U dient zelf een exemplaar van de opgaven en van de normen mee te brengen.

Het aantal bijeenkomsten voor lbo/mavo is geconcentreerd in zestien verschillende plaatsen. Het gehele examen wiskunde volgens een C- en een D-programma zal ter sprake komen. Deze bijeenkomsten zijn belangrijk ook met het oog op ontwikkelingen in de nabije toekomst.

Examenbesprekingen wiskunde lbo/mavo C en D op vrijdag 8 mei 1987 van 15.00 h tot 18.00 h te:

	Plaats	School		Gespreksleiders *)
1	ALKMAAR	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072 - 11 34 38	1 2	T. Dunselman, Burg. Albertiplein 11, 1561 WH Krommenie, 075 - 28 40 42 C. Gaykema, Crijnssenstraat 48 III, 1058 XX Amsterdam, 020 - 12 91 85
2	AMSTERDAM	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 1068 MR Amsterdam 020 - 19 83 99	1 2	E. G. Doevendans, C. Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020 - 36 20 49 E. G. Doevendans, C. Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020 - 36 20 49
3	ARNHEM	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085 - 42 30 28	1 2	M. Hondelink, Het Elferink 77, 7478 CB Diepenheim, 05475 - 13 22 L. Hoekstra, Rondenhof 40, 6662 ZW Elst, 08819 - 7 38 60
4	EMMEN	Openbare S.G. De Dissel Smedingeslag 1 7824 HK Emmen 05910 - 2 34 56	1 2	J. F. Struik, Liniekampen 12, 7873 BT Odoorn, 05919 - 1 27 90 R. Zwierstra, Oringerbrink 23, 7812 JR Emmen, 05910 - 1 37 11
5	's-GRAVENHAGE	S.G. Johan de Witt Stadhouderslaan 82 2517 JB 's-Gravenhage 070 - 54 77 71	1 2	L. C. M. van Wijk, Paviljoensgracht 47, 2512 BL 's-Gravenhage, 070 - 60 75 95 C. M. de Hoog, Swanenburch 8, 2681 NM Monster, 01749 - 4 84 83

	Plaats	School		Gespreksleiders *)
6	GRONINGEN	Zernike College Parkweg 128 9727 HD Groningen 050 - 26 03 45	1 2	S. Kooiman, Illegaliteitslaan 11, 9727 EA Groningen, 050 - 25 12 89 J. C. Borst, Bonenakker 51, 9932 JD Delfzijl, 05961 - 2 54 64
7	HAAKSBERGEN	R.K. Mavo De Raahorst Van Brakelstraat 1 7482 VV Haaksbergen 05427 - 1 32 85	1 2	G. Nijenmanting, Verdistraat 22, 7482 TM Haaksbergen, 05427 - 1 32 13 C. Th. J. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg, 08350 - 2 43 37
8	HOOGEZAND	Dr. A. Jacobs Scholengemeenschap Nieuweweg 4 9603 BH Hoogezand 05980 - 2 68 00	1 2	E. G. van den Handel, Ceresakker 27, 9781 KK Bedum, 05900 - 1 32 68 W. Visser, Amalia van Solmslaan 11, 9602 GM Hoogezand, 05980 - 2 03 03
9	LEEUWARDEN	Mavo Nylân Prinsessenweg 4 8931 EG Leeuwarden 058 - 88 42 02	1 2	F. de Boer, Klaas Kuikenstraat 7, 8802 VB Franeker, 05170 - 36 10 J. Tuinstra, De Finne 36, 9036 KK Menaldum, 05185 - 15 17
10	MIDDELBURG	Oranje Nassau Mavo Oranjelaan 11 4332 VA Middelburg 01180 - 2 52 74	1 2	C. J. Beimers, Duunmede 49, 4337 BD Middelburg, 01180 - 3 51 16 A. Kammeraat, Van Strijenstraat 19, 4371 CH Koudekerke, 01185 - 22 31
11	PANNINGEN	Bouwens van der Boye College Minister Calsstraat 10 5980 AB Panningen 04760 - 30 31	1 2	J. K. M. Verheesen, Brantstraat 13, 6112 AH Sint Joost, 04754 - 54 87 W. J. H. Crijns, Den Roover 17, 5953 BM Reuver, 04704 - 19 46
12	ROTTERDAM	Chr. Mavoschool Het Lage Land Kromhoutstraat 1 - 7 3067 AE Rotterdam 010 - 4 20 53 93	1 2	A. B. T. Hazenberg, Kalverdans 27, 2771 RR Boskoop, 01727 - 37 74 L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht, 078 - 14 55 22
13	SITTARD	Scholengemeenschap St. Catharina Odasingel 90 6131 GZ Sittard 04490 - 1 75 86	1 2	E. M. A. M. van der Vring, Wehrerweg 221, 6137 LC Sittard, 04490 - 1 19 05 J. J. H. Plum, Maastrichterweg 16, 6381 RZ Ubach over Worms, 045 - 31 29 08
14	TILBURG	Moller Instituut Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013 - 39 49 22	1 2	M. Bekkers, Vorsenpoel 158, 5283 ZN Boxtel, 04116 - 7 71 19 W. van Gaans, Basaltdijk 8, 4706 DL Roosendaal, 01650 - 4 31 65
15	UTRECHT	Mavo/Leaoschool Lunetten Kampereiland 6 3524 CZ Utrecht 030 - 88 35 51	1 2	J. H. Sybrandy, Berkelwijk 31, 3831 MN Leusden, 033 - 94 27 70 R. J. Roukema, Buntlaan 34, 3951 VN Maarn, 03432 - 28 95
16	ZWOLLE	Thorbecke Scholengemeenschap Dr. van Heesweg 1 8025 AB Zwolle 038 - 54 66 77	1 2	G. J. Scheppink, Merelstraat 102, 7731 XE Ommen, 05291 - 35 26 S. R. Zwaan, Krulmate 57 A, 8014 KG Zwolle, 038 - 65 25 30

*) 1: C-examen
2: D-examen

Examenbesprekingen vwo wiskunde-B op vrijdag 8 mei 1987 van 16.00 h tot 18.00 h te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51	S. Th. Min Binnenplaats 35 1695 JJ Blokker 02290-3 77 56
2	GRONINGEN	Rölingcollege Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00	Drs. M. van Steenis Kamplaan 8 9301 KK Roden 05908-1 81 21
3	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058-88 23 25	H. Tromp Staniastate 27 8926 LA Leeuwarden 058-67 13 18
4	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-4 77 00 33	E. J. van Dongen Walenburgerplein 126 3039 AP Rotterdam 010-4 67 21 30
5	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490-1 01 59	T. Vandeberg Mr. Absilstraat 1 6461 EX Kerkrade 045-45 57 45
6	TILBURG	Moller Instituut Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013-39 49 22	A. L. P. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46
7	ZUTPHEN	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41	Drs. W. A. Weenink Apollolaan 24 7311 EZ Apeldoorn 055-21 72 07

Examenbesprekingen vwo wiskunde-A op vrijdag 1 mei 1987 van 16.00 h tot 18.00 h te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51	A. Holleman Mient 33 1901 AB Castricum 02518-5 49 13
2	ARNHEM	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	Drs. W. H. M. Kremers De Haantjes 55 6666 DP Heteren 08306-2 26 07
3	GOES	Buys Ballotcollege Bergweg 4 4461 NB Goes 01100-1 30 10	Drs. S. H. P. Garst Kerkring 32 3255 AH Oude Tonge 01874-21 77

4	GRONINGEN	Mathematisch Instituut WSN - gebouw Landleven 5 9747 AD Groningen 050 - 63 39 69	Drs. J. V. Jansen Boterdiep Westzijde 5 9781 EH Bedum 05900 - 1 30 43
5	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058 - 88 23 25	E. C. Scholl Mr. P. J. Troelstraweg 105 8916 CP Leeuwarden 058 - 13 77 69
6	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010 - 4 77 00 33	Drs. J. W. Maassen Traviatastraat 132 2555 VJ 's-Gravenhage 070 - 68 79 98
7	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490 - 1 01 59	H. van der Kooij Nederhoven 2 5655 BS Eindhoven 040 - 52 49 37
8	TILBURG	Moller Instituut Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013 - 39 49 22	Drs. J. Mossou Hertoglaan 31 5262 JM Vught 073 - 56 25 83
9	UTRECHT	S.O.L. Archimedeslaan 16 3584 BA Utrecht 030 - 52 51 11	Ir. F. Appelman De Veste 15 - 46 8231 JL Lelystad 03200 - 3 31 15
10	ZWOLLE	C.L.Z. Campus 2 - 4 8017 CA Zwolle 038 - 69 99 11	Dr. J. van Lint Parkstraat 22 8011 CJ Zwolle 038 - 21 21 29

Examenbesprekingen havo wiskunde op vrijdag 8 mei 1987 van 18.30 h tot 20.30 h te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020 - 44 51 51	G. Fokkens E. Rooseveltlaan 66 1183 CL Amstelveen 020 - 43 84 47
2	GRONINGEN	Rölingcollege Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050 - 42 10 00	C. H. G. Hegeman Coronastraat 62 9742 EH Groningen 050 - 77 54 90
3	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058 - 88 23 25	Ir. W. L van Hulsen Sinderhôven 22 9254 GD Hardegarijp 05110 - 32 50

4	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010 - 4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen a.d. Lek 01807 - 1 52 10
5	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490 - 1 01 59	J. J. N. M. Salden Absbroekstraat 10 6151 CW Munstergeleen 04490 - 1 94 79
6	TILBURG	Moller Instituut Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013 - 39 49 22	F. L. G. Esser De Ruyterstraat 22 5102 BR Dongen 01623 - 1 64 89
7	ZUTPHEN	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750 - 1 50 41	J. van den Heuvel Kloetschup 15 7232 CJ Warnsveld 05750 - 2 39 63

Mededelingen

Van de bestuurstafel .....

Onder deze rubriek wil het bestuur pogingen doen om de leden wat informatie te geven over wat er zoal in de bestuursvergadering aan de orde komt. Het is niet onze bedoeling een uitgebreid verslag te geven van alles wat er rond de bestuurstafel besproken wordt – het zou te langdradig worden – maar meer ons te beperken tot 'de krenten uit de pap'. Hopelijk levert deze rubriek daarmede een bijdrage tot een goed contact tussen het bestuur en de leden en brengt zij onze vereniging tot verdere bloei.

Pythagoras

Van tijd tot tijd wordt het bestuur geconfronteerd met het wel en wee van dit wiskundetijdschrift voor jongeren. Soms is het 'wel', maar vaker 'wee'. Ook nu is het 'wee': in een brief van hoofdredacteur Hessel Pot wordt gewag gemaakt van een grote schrijversnood. Of het bestuur kan meehelpen aan het werven van auteurs. Dat doen we dus. Wie zoekt er mee?

Examenbesprekingen 1987

Het organiseren van de jaarlijkse examenbesprekingen is langzamerhand een routineklus geworden. Echter dit jaar niet. Er zijn twee zeer onzekere faktoren; ten eerste: hoeveel collega's zullen afkomen op de besprekingen van het nieuwe wiskunde A-examen? En ten tweede: zal de nieuwe vorm van de lbo-mavo examens door de geringere hoeveelheid open werk misschien minder mensen trekken?
Besloten wordt het aantal plaatsen voor wiskunde A uit te breiden tot 10 t.w.: Zwolle, Utrecht, Tilburg, Sittard, Rotterdam, Leeuwarden, Groningen, Goes, Arnhem en Amsterdam. De bijeenkomsten voor wiskunde B zullen gekoppeld worden aan de besprekingen van het havo-werk en gehouden worden in de zes plaatsen die vorig jaar voor wiskunde I beschikbaar waren. Ten aanzien van de lbo/mavo besprekingen wordt besloten te trachten deze bijeenkomsten nieuw elan te geven door zowel het open als het gesloten werk meer inhoudelijk te behandelen nu er minder tijd nodig zal zijn voor het verfijnen van de officiële normen.

Valo

De bestuursvergadering van november j.l. was voor een deel gewijd aan de commissie Veldadvisering Leerplanontwikkeling. Daartoe waren de vertegenwoordigers van onze vereniging in die commissie, mevr. N. Querelle en dhr. S. Kemme, op deze bestuursvergadering uitgenodigd. De taak van de Valo is de SLO (Stichting Leerplanontwikkeling) te adviseren over de leerplanontwikkeling voor het wiskunde- en informatica-onderwijs. Dat betekent dat de Valo tot taak heeft:

a. het stimuleren van de meningsvorm in het onderwijsveld over:
   - de behoeften die er zowel in de nabije als in de wat verdere toekomst aan leerplanontwikkeling zijn,
   - de prioriteiten die ten aanzien van de leerplanontwikkeling moeten worden gesteld;
b. de SLO te adviseren over de activiteitenplannen, meerjarenplannen en beleidsnota's die van belang zijn voor de leerplanontwikkeling;
c. de SLO te adviseren over de vakinhoudelijke aspecten van projectaanvragen en uitvoeringsplannen;
d. het beoordelen van produkten van de SLO voordat deze buiten de kring van de projectdeelnemers aan het onderwijsveld ter beschikking worden gesteld.

De Valo functioneert nu ongeveer een half jaar, maar de samenwerking met de SLO verloopt nog wat stroef. V.w.b. de contacten met het onderwijsveld hadden de leden van de Valo het plan een aantal responsgroepen te vormen. Om verschillende redenen is dit plan voorlopig op de lange baan geschoven. Het idee is nu om in navolging van de vroegere CMLW een centrale club te vormen waarin o.a. de SLO en OW & OC zijn vertegenwoordigd. In november heeft een bijeenkomst plaats gevonden, waarvoor onder anderen een aantal oud CMLW-leden was uitgenodigd. Deze vergadering had het karakter van een brainstorm. Binnenkort zullen nadere plannen bekend gemaakt worden.

Stuurgroep 12-16.

De lang verwachte stuurgroep die het project moet gaan begeleiden en sturen dat voorziet in een verandering van het wiskundeprogramma voor lbo, mavo en onderbouw havo/vwo is nu dan eindelijk geformeerd. Voorzitter is prof. dr. F. van der Blij en ons bestuur heeft een aantal leden voorgedragen. Hopelijk zal de stuurgroep spoedig met zijn werkzaamheden beginnen. De tijd gaat dringen nu in het vwo de nieuwe examenprogramma's wiskunde zijn ingevoerd en de verandering in het havo niet lang meer op zich laat wachten.

Ontevredenheid met het meerkeuzewerk

De opwekking van het bestuur om d.m.v. een brief aan het bestuur te getuigen van bezorgdheid over de ontwikkeling van de mavo-lbo-wiskunde-examens wordt hier en daar al gehonoreerd. Toch zouden we nog wat meer reacties willen ontvangen. Het is algemeen bekend dat er over de vorm van de huidige examens grote ontevredenheid bestaat. Het bestuur wil alle brieven over dit onderwerp verzamelen en aan de betrokken beleidsmakers overhandigen. Wie klimt er in de pen?

L. Bozuwa

Boekbespreking

R. Fisher, C. J. Malle, *Mensch und Mathematik*, Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Mannheim, 359 blz., DM 38,–.

Het voor ons liggende boek is verschenen als Band 1 van een nieuwe serie van deze uitgever:
'Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik'.
De reeks heeft o.a. ten doel enig overzicht te bieden in en oriëntatie te geven op de enorme toevloed van didaktische geschriften die de laatste jaren verschijnen.

'Für den Studenten wie für den in der Praxis stehender Lehrer und Dozenten ist es dadurch aber auch schwieriger geworden, einen Überblick über alle relevanten Aspekte der Originalliteratur zu erwerben bzw. zu behalten'.

De diverse delen zullen 'im Hinblick auf die behandelten Themen breit angelegt sein, um ein möglichst grosses Spektrum relevanter Fragestellungen zur Didaktik der Mathematik zu Überdecken'.

In dit eerste deel staat door het hele boek heen de vraag centraal welke betekenis de wiskunde heden ten dage heeft voor de mens in zijn dagelijks leven en handelen. Dit thema staat inderdaad centraal in de gedachten over de ontwikkelingen van de op de scholen te onderwijzen wiskunde.
Niet alleen in Nederland maar ook in vele andere landen. Hiervan uitgaande is een nieuwe bezinning ontstaan op vele didaktische situaties.

Vanuit deze gedachten hebben de schrijvers hun boek samengesteld. Zij gaan in op de onderwerpen die onderwezen moeten worden: uit de algebra, de analyse, de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek. Maar ook geven zij hun visie op vele andere, meer fundamentele kwesties, zoals bewijzen, heuristiek, toepassingsgerichtheid, communicatie in de wiskunde.
Daarnaast komen historische, wetenschapstheoretische, psychologische en onderwijskundige zaken aan de orde.
Door de behandelingswijze en de stijl van schrijven is er een uitermate boeiend boek ontstaan, dat zich op een prettige wijze laat lezen. Ook voor de situatie in Nederland is het alleszins de moeite waard kennis te nemen van dit boek.

Tot slot nog een citaat:
'Wir betreiben Didaktik nicht hauptsächlich in der Absicht, die Welt zu verbessern. Wir beschäftigen uns mit dem Verhältnis zwischen Mensch und Mathematik, weil das eine interessante, faszinierende Sache ist.
Unsere Hoffnung ist, dass auch der Leser/die Leserin daran Freude finde möge'.

W. Kleijne

Bestuurskandidaten gevraagd

Op de jaarvergadering van 25 oktober 1986 heeft de voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren gezegd dat het bestuur er naar streeft gemiddeld één bestuurslid per jaar door een nieuw bestuurslid te vervangen. Om deze vervanging zo goed mogelijk te laten verlopen is het gewenst dat het bestuur zo veel mogelijk geschikte kandidaten kent. Het bestuur vraagt daarom alle leden om mee te denken over goede bestuurskandidaten, speciaal voor de vervulling te zijner tijd van het voorzitterschap en het secretariaat, en namen van deze personen op te zenden aan de secretaris, drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.

J. Maassen

Sixth International Congress On Mathematical Education

ICME6, Budapest, July 23rd – August 3 1988 Theme Group 2: Computers and the Teaching of Mathematics

Contributions for this area are sought from those active in the field and wishing to share their work on an international level. Please write to the address below for further details and application forms, giving a few brief notes of your current activities.

Rosemary Fraser, Chief Organiser T2, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, NG7 2RD.

Kalender

28 maart 1987: Kapellen, Studiedag NvWL/VVWL
2-4 april 1987: Ede, Didactiek-conferentie
15 en 16 april 1987: Utrecht, Nederlands Mathematisch Congres
14 april 1987: Keulen, MNU-Congres
23 juli-3 aug, 1987: Budapest, ICME-Congres
11 sept. 1987: Utrecht, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
31 okt. 1987: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW

Inhoud

A. van Streun: A bas Euclide!
Weg met de verzamelingen 161

Nanda Querelle: Multiple Choice 165

Hans ter Heege: Over de grens 171

Kees van Baalen: Mathesis in Utopia 175

Harrie Broekman: Structuur aanbrengen door leerlingen 179

Examenbesprekingen 186

Mededelingen 190

Boekbesprekingen 178, 185, 192

Recreatie 164

Kalender 192

Adressen van auteurs

K. van Baalen, Durgerdam 40, Durgerdam

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht
Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

H. ter Heege, SLO, Beltstraat 44
7511 JW Enschede

W. M. G. Querelle, Fazantenkamp 663
3607 DN Maarssen